集合論問題集

1　論理

1. 「雨の日はいつも勉強をする」この文章の否定を作れ。
2. 「任意の素数は奇数である」という命題について以下の問いに答えよ。
   (1) この命題の真偽を判定し、そのことを証明せよ。
   (2) この命題の否定をつくれ。
3. 「任意の二等辺三角形の両底角は等しい」という命題について以下の問いに答えよ。
   (「三角形 ABC において、$AB = AC$ ならば $\angle B = \angle C$ である」という意味である。)
   (1) この命題の真偽を判定し、そのことを証明せよ。
   (2) この命題の否定をつくれ。
4. 「n が偶数ならば n^2 も偶数である」という命題について以下の問いに答えよ。
   (1) この命題の真偽を判定せよ。
   (2) この命題の否定をつくれ。
5. 以下の命題の否定をつくれ。
   (1) 任意の正則行列に対して、行列式の値は 0 ではない。
   (2) $a < b$ なる有理数 a, b に対して、適当な有理数 q が存在して、 $a < q < b$ となる（有理数の稠密性)。
   (3) 適当な複素数 x が存在して、$x^2 = -1$ である。
   (4) 有限次元ベクトル空間で任意の線形写像は行列で表すことができる。
   (5) 任意の 1 より大きい数 p に対して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は収束する。
   (6) 適当な数列 $a_{m,n}$ が存在して、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ となる。
6. 真理表を使って以下のことを示せ。
   (1) 命題 P に対して「$\neg(\neg P) \iff P$」である。(二重否定)
   (2) 命題 P, Q に対して「$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$」である。(De Morgan の法則)
   (3) 命題 $P \Rightarrow Q$ はその対偶 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ と同値である。
   (4) 命題 P, Q, R に対して、「$P \Rightarrow Q$ and $Q \Rightarrow R$」が成り立つとき、「$P \Rightarrow R$」が成り立つ。(三段論法)
7. 以下の命題を記号 $(\forall, \exists)$ をつかって書け。またその否定をつくれ。
   (1) 任意の実数に対して、その絶対値は 0 以上である。
   (2) 0 以上の任意の数 y に対して $f(x) = y$ となるような 10 より大きい数 x が存在する。
   (3) 任意の正の数 ε に対して「$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」となる番号 N が存在する。(数列 a_n は α に収束する)
8. $(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$ が真であるとき、命題 P, Q のそれぞれについて、真か、偽か、あるいは真偽が確定しないかを判定せよ。
9. 数学における命題とは何か？ また、自分で命題をつくってみよ。

集合論問題集

2 集合

1. A, B を集合とする。
   (1) $x \in A \cap B$ であることの定義を書け。
   (2) $x \in A \cup B$ であることの定義を書け。
   (3) $A \subset B$ であることの定義を書け。
   (4) $A = B$ であることの定義を書け。
2. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ であるとき、$A \cap B$, $A \cup B$ をそれぞれ求めよ。
3. A を 4 の倍数全体の集合、B を 6 の倍数全体の集合とする。このとき $A \cap B$ を決定せよ。
4. $A \subset C$ かつ $B \subset C$ であるならば、$A \cup B \subset C$ であることを示せ。
5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ。
6. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示せ。
7. A を集合とする。$A \cap \phi = \phi$、$A \cup \phi = A$ を示せ。
8. 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える。
   (1) $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の定義を書け。
   (2) $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ (De Morgan の法則) を証明せよ。
9. $A \subset B$ とする。補集合は B で考えることにして以下を証明せよ。
   (1) $(A^c)^c = A$
   (2) $A \cup B = B$
   (3) $A \cup A^c = B$
   (4) $A^c \cap A = \phi$
   (5) $\phi^c = B$
10. $A \cap B \subset C$ ならば $B \subset A^c \cup C$ であることを証明せよ。
11. $A \cap C = B \cap C$ かつ $A \cup C = B \cup C$ であるならば、 $A = B$ であることを証明せよ。
12. 集合 X の部分集合 $A,\ B$ について $A \cap B = \phi$ であることと $A \subset X - B$ であることは同値であることを示せ。
13. 直積集合 $A \times B$ とは何か。その定義を書け。
14. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ であるとき $A \times B$ の元をすべて書け。
15. $A \subset X,\ B \subset Y$ とする。このとき、$A \times B \subset X \times Y$ を証明せよ。
16. $A = \{a, b, c\}$ という集合のべき集合 2^A を具体的に書け。
17. 自然数 n に対して $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ とおく。
   (1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それが正しいことを証明せよ。
   (2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それが正しいことを証明せよ。

集合論問題集

3　写像

1. (1) 写像とは何か、定義を書け。
   (2) 写像が等しいとはどういうことか、定義を書け。
2. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ を $x \longmapsto \pm x$ で定めると、これは写像か？ ただし $\mathbb{R}^+ := \{x > 0 | x \in \mathbb{R}\}$ とする。
3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto x^2$ で定めると、これは写像か？
4. 写像を具体的に一つ作れ。
5. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto x+1,\ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $x \longmapsto 2x-3$ で定めたとき、合成写像 $g \circ f$ を求めよ。
6. (1) 写像 $f : X \to Y$ に対して、像 $f(X)$ の定義を書け。
   (2) 写像 $f : X \to Y$ と $A \subset Y$ に対して、A の逆像 $f^{-1}(A)$ の定義を書け。
   (3) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto 2x$ で定めたとき $\mathbb{N}$ に対する像 $f(\mathbb{N})$ と $A = \{2,3,4\} \subset \mathbb{N}$ の逆像 $f^{-1}(A)$ を具体的に書け。
7. (1) 全射、単射の定義を書け。
   (2) 写像 $f : X \to Y$ に対して $f(X) = Y \iff$ 「$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \ \ \text{s.t.} \ \ y = f(x)$」(任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在する）を示せ。
   (3) $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ で具体的に、全射を構成せよ。また、それが全射であることを示せ。
   (4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で具体的に、単射を構成せよ。また、それが単射であることを示せ。
8. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x+1$ で定めるとき、f は単射であることを示せ。
   (2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x$ で定めるとき、f は全射であることを示せ。
   (3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(x) = 2x$ で定めるとき、f は単射であるが全射でないことを示せ。
9. (1) 全単射の定義を書け。
   (2) 閉区間 $[a,b]$ から閉区間 $[c,d]$ への全単射を具体的に構成せよ。ただし、ここで $a < b,\ c < d$ であるとする。
   (3) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{N}$ への全単射を具体的に構成せよ。（ちょっと難しい。）
10. (1) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への単射ではあるが全射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (2) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全射ではあるが単射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (3) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への単射ではあるが全射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (4) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全射ではあるが単射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
11. (1) $f : X \longrightarrow Y$ が全射のとき、$Y \supset B$ に対して、$f(f^{-1}(B)) = B$ であることを示せ。
    (2) $f : X \longrightarrow Y$ が単射のとき、$X \supset A$ に対して、$f^{-1}(f(A)) = A$ であることを示せ。
12. (1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ を示せ。
    (2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ を示せ。また $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ は成り立つか？ 成り立たないならば、反例を挙げよ。
13. $f : X \longrightarrow Y,\, g : Y \longrightarrow Z$ について、f, g ともに単射ならば $g \circ f$ も単射であることを示せ。
14. $f : X \longrightarrow Y,\, g : Y \longrightarrow Z$ について、f, g ともに全射ならば $g \circ f$ も全射であることを示せ。
15. $f : X \longrightarrow Y,\, g : Y \longrightarrow Z$ について、f が全単射であるとき「g が単射である」$\Leftrightarrow$「 $g \circ f$ も単射である」を示せ。
16. $f : X \longrightarrow Y,\, g : Y \longrightarrow Z$ について、$g \circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ。
17. $f : X \longrightarrow Y,\, g : Y \longrightarrow Z$ について、$g \circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ。
18. $f : X \longrightarrow Y$ について、f が全単射であるための必要十分条件は、$g : Y \longrightarrow X$ で $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ なるものが存在することである。これを示せ。ただし id_X は X の恒等写像を表すものとする。
19. $f : B \to C$ とする。$f_* : \mathrm{Map}(A,\ B) \to \mathrm{Map}(A,\ C)$ を $f_*(\psi) = f \circ \psi$ で定義する。このとき以下を証明せよ。

    (1) f が単射ならば f_* は単射である。

(2) f が全射ならば f_* は全射である。

20. $X,\ Y$ を集合、$A,\ B$ を X の部分集合、$C,\ D$ を Y の部分集合とする。
このとき $f: X \to Y$ に対して以下が成立することを示せ。

(1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

(2) $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$

(3) $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(4) $f^{-1}(Y - D) = X - f^{-1}(D)$

(5) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(6) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$

21. $a \in Y$ を一つ固定する。$C_a : X \to Y$ を $x \mapsto a$ で定義する。このとき Y の各元に対する逆像を求めよ。

22. 集合 X から Y へ全単射が存在するとき X のべき集合 2^X から Y のべき集合 2^Y へ全単射が存在することを示せ。

23. 写像 $f: X \to Y,\ g, h: Y \to X$ が $g \circ f = id_X,\ f \circ h = id_Y$ を満たすならば、f は全単射で、$g = h$ であることを示せ。

24. 集合 X の部分集合 A に対して、$f_A \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ を

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

で定める。(これを A の特性関数という。) A, B を X の部分集合とすると、任意の $x \in X$ に対して

$$f_{A\cap B}(x) = f_A(x) f_B(x), \quad f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$$

であることを示せ。

4 関係

4.1 順序関係

1. 集合 A 上の関係「$\leq$」が順序関係であることの定義を書け。

2. 集合 X について、べき集合 2^X を考えたとき、関係「$\subset$」は順序関係であることを示せ。

3. 順序集合 $(A, \leq)$ が全順序集合であることの定義を書け。

4. 全順序集合ではない順序集合の例を一つ答えよ。

5. $\mathbb{R}$ が (通常の大小関係による順序で) 整列集合ではないことを示せ。

6. A 集合とし、B, C をその部分集合とする。
   (1) $B \cap C$ は B と C の両方に含まれる A の部分集合のうち、(包含関係に関して) 最大のものであることを示せ。
   (2) $B \cup C$ は B と C の両方を含む A の部分集合のうち、(包含関係に関して) 最小のものであることを示せ。

7. (ベクトル空間とその部分空間についての知識を仮定する。) U をベクトル空間とし、V, W をその部分空間とする。$V + W = \{v + w \mid v \in V,\ w \in W\}$ とおく。
   (1) $V \cap W, V + W$ は U の部分空間であることを示せ。
   (2) $V \cap W$ は V と W の両方に含まれる U の部分空間のうち、(包含関係に関して) 最大のものであることを示せ。
   (3) $V + W$ は V と W の両方を含む U の部分空間のうち、(包含関係に関して) 最小のものであることを示せ。

8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の辞書式順序の定義を書け。またそれが整列順序であることを示せ。

9. 数学的帰納法が成立することを証明せよ。(下の自然数の定義を使ってください)
   [Peano の公理] 以下の五つの条件を満たすものを「自然数」とし、その全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す。
   (1) 特別な元 1 が存在する。
   (2) $\mathbb{N}$ の任意の元 x に対して $x' \in \mathbb{N}$ が存在する。
   (3) $x' = 1$ となる $x \in \mathbb{N}$ は存在しない。
   (4) $\mathbb{N} \ni x, y$ に対して $x' = y' \Longrightarrow x = y$ が成立。
   (5) $\mathbb{N} \supset X$ に対して、
      (i) $1 \in X$
      (ii) $x \in X \Longrightarrow x' \in X$ を満たすならば $X = \mathbb{N}$

4.2 同値関係

10. 集合 X 上の関係「$\sim$」が同値関係であることの定義を書け。

11. 集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の関係「$\sim$」を「$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ni (x, y),\ (a, b)$ に対して $(x, y) \sim (a, b)$ とは $xb = ay$」と定めたとき、関係「$\sim$」は同値関係であることを示せ。

12. 実数成分の n 次正方行列全体の集合 $M(n, \mathbb{R})$ について関係「$\sim$」を「n 次正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ のとき $A \sim B$」と定める。このとき関係「$\sim$」は同値関係であることを示せ。

13. 集合 X の部分集合全体の集合 2^X を考える。$A,\ B \in 2^X$ に対して関係「$\sim$」を「A と B の間に全単射が存在するとき $A \sim B$」と定める。このとき関係「$\sim$」は 2^X 上の同値関係であることを示せ。

14. n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から原点を除いた集合に以下のように関係「$\sim$」を定める。$\boldsymbol{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ に対して、ある 0 でない実数 α が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$ のとき $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ とする。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。また、このときの同値類を考え、同値類の代表系を一つ求めよ。

15. (1) $\mathbb{Z}$ について関係「$\sim$」を「$x - y = 2a$ なる $a \in \mathbb{Z}$ が存在するとき $x \sim y$」と定めるとこれは同値関係であることを示せ。
    (2) 0, 1 を含む同値類を求めよ。
    (3) $\mathbb{Z}/\sim$ を求めよ。

16. (1) $n \in \mathbb{N}$ を固定する。$\mathbb{Z} \ni x,\ y$ に対して、$x \equiv y \pmod{n}$ であることの定義を書け。

(2) この関係は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。

(3) 493256823 を 9 で割ったときの余りを求めよ。(集合論とはあまり関係ありません。「$\equiv$」に慣れてください)

(4) $2x - 5y = 1$ の整数解を求めよ。(集合論とはあまり関係ありません。「 $\equiv$ 」に慣れてください)

17. (線形代数に関する深い知識を仮定する。) 問題 12 と同様に $M_n(\mathbb{C})$ に同値関係「$\sim$」を定義する。このときの同値類はどのようなものかを考察せよ。

5　難しいこと

5.1　濃度

1. 濃度とは何か。その定義を書け。
2. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ を示せ。($\aleph_0$ は自然数全体の集合の濃度のことである。)
3. $|(-1,1)| = |\mathbb{R}|$ を示せ。
4. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ を証明せよ。
5. $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ を示せ。
6. $|X| < |2^X|$ を証明せよ。(ちょっと難しい)
7. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ への全単射を具体的に構成せよ。

5.2　選択公理

7. 選択公理とは何かを書け。
8. 整列可能定理を書け。
9. Zorn の補題を書け。
10. 任意の無限集合は可算集合を部分集合にもつ。これを証明せよ。（ちょっと難しい）
11. 写像 $f : X \to Y$ について、
    (1) f : 全射ならば $f \circ s = id_Y$ となる写像 $s : Y \to X$ が存在することを示せ。（ちょっと難しい）
    (2) f : 単射ならば $r \circ f = id_X$ となる写像 $r : Y \to X$ が存在することを示せ。
    (3) (1),(2) より X から Y への単射が存在することと Y から X への全射が存在することが同値であることを示せ。

集合論問題集・解答例と解説

1　論理

1. 雨の日で勉強をしない日がある。

   まず、この文章は「雨の日である $\Rightarrow$ 勉強をする」という意味です。そして「$P \Rightarrow Q$」の否定は「P かつ $\neg Q$」です。

2. (1) 偽である。なぜなら 2 は素数であって、かつ偶数である。(反例を挙げた)

   (2) 素数でありかつ偶数である数が存在する。

3. (1) 真である。

   $\triangle ABC$ を $AB = AC$ の二等辺三角形とする。すると、$\triangle ABC$ と $\triangle ACB$ で $\angle A$ が共通、$AB = AC$ より、「二辺とその間の角がそれぞれ等しい」ので $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ すなわち $\angle B = \angle C$ で底角が等しい。(二等辺三角形は裏返して考えてみてください。)
   「線分 BC の垂直二等分線が点 A で交わる」という事実は底角が等しいことを使って証明するのでここで使ってはいけません。

   (2) 底角が合同でない二等辺三角形が存在する。（これはもちろん偽です。）

4. (1) 真である。

   なぜなら、n が偶数だから、適当な整数 ℓ が存在して $n = 2\ell$ と書ける。すると $n^2 = (2\ell)^2 = 4\ell^2 = 2(2\ell^2)$ すなわち n^2 も偶数である。

   (2) n が偶数でかつ n^2 が奇数であるものが存在する。

   「$P \Rightarrow Q$」の否定は「P かつ $\neg Q$」です。

5. (1) 適当な正則行列が存在して行列式の値が 0 になる。(行列式の値が 0 であるような正則行列が存在する。)

   (2) $a < b$ である適当な有理数 a, b が存在して、任意の有理数 q に対して、 $a \geq q$ または $q \geq b$ である。

   a, b, q に関する命題「$a < q < b$」は「$a < q$ and $q < b$」ということである。

   (3) 任意の複素数に対して、$x^2 \neq -1$ である。

   (4) 有限次元ベクトル空間で適当な線形写像が存在して、行列で表すことができない。(行列で表すことができない有限次元ベクトル空間の線形写像が存在する。)

   (5) 適当な 1 より大きい数 p が存在して、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は発散する。

   (6) 任意の数列 $a_{m,n}$ に対して、 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ となる。

6. (1)

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
1	0	1
0	1	0

（二重否定）

(2)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

（De Morgan の法則）

(3)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

(4)

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

（三段論法）

命題に対して仮定が偽であればその命題は全体として真になります。

7. (1) ${}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
否定は ${}^{\exists}x \in \mathbb{R},\ |x| < 0$

(2) ${}^{\forall}y \geq 0,\ {}^{\exists}x > 10,\ f(x) = y$
否定は ${}^{\exists}y \geq 0,\ {}^{\forall}x > 10,\ f(x) \neq y$
(ある 0 以上の数 y が存在して、任意の 10 より大きい数 x に対して $f(x) \neq y$ となる。)

(3) ${}^{\forall}\epsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon)$
否定は ${}^{\exists}\varepsilon > 0,\ {}^{\forall}N \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \text{ and } |a_n - \alpha| \geq \varepsilon)$

否定がほしければ「$\forall$, $\exists$」をつかって命題を書き直し、$\forall$ は $\exists$、$\exists$ は $\forall$ にそれぞれ書き換え、最後の部分を否定すれば機械的につくれます。

8. 真理表を用いる。

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$ が真ということは、下の 2 行のいずれかということになる。よってこのとき P は偽で、Q は確定しない。

9. 「真偽がはっきりと定まった文章」を命題といいます。

例. 素数は無限に存在する。（真）
これからの数学で「命題」というと、真であるものを扱います。「はっきり」という意味についてはテキストの p.5 に詳しく書いてあります。

2 集合

1. (1) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ and $x \in B$
   (2) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ or $x \in B$
   (3) $A \subset B \Leftrightarrow$ 「$x \in A \Rightarrow x \in B$」
   (4) $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ and $A \supset B$

   定義はきちんと覚えてください。定義を知らないとなにもできません。

2. $A \cap B = \{2, 3, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3. $A \cap B$ は 12 の倍数全体の集合。

   なぜなら、$A \cap B$ から任意に元をとってくると、4 の倍数かつ 6 の倍数 ($\cap$ の定義) となるので $lcm(4, 6) = 12$ だから、12 の倍数。ただし lcm で最小公倍数を表します。(Least Common Multiple)

4. $x \in A \cup B$ とする。このとき、$x \in A$ または $x \in B$ である。$x \in A$ のとき $A \subset C$ より $x \in C$ であり、$x \in B$ のとき $B \subset C$ より $x \in C$ である。よって、いずれの場合も $x \in C$ である。以上より $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cup B \subset C$ が成り立つ。

5. $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ を背理法で示す。$x \in (A \cup B)^c$ とすると、$x \notin A \cup B$ となる。したがって、$x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから、$x \in A^c \cap B^c$ である。

   $(A \cup B)^c \supset A^c \cap B^c$ を示す。$x \in A^c \cap B^c$ とすると、$x \in A^c$ かつ $x \in B^c$ である。すなわち、$x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから、$x \notin A \cup B$ となる。したがって、$x \in (A \cup B)^c$ である。

   以上より $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ である。

6. 問 5 より、$(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ であるから、$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

7.
   - $A \cap \phi = \phi$ の証明
     (背理法) $A \cap \phi \neq \phi$ と仮定する。すると $A \cap \phi$ に元が存在してそれを x とおくと $x \in A$ かつ $x \in \phi$ 。つまり、空集合に元が存在し不合理。仮定は誤りである。よって $A \cap \phi = \phi$ である。
   - $A \cup \phi = A$ の証明
     $A \cup \phi \subset A$ かつ $A \cup \phi \supset A$ を示せばよい。まず、$A \cup \phi \subset A$ を示そう。$A \cup \phi$ から任意の元 x をとると、$x \in A$ または $x \in \phi$ で、$x \in \phi$ は空集合の定義に反するので $x \in A$ となる。よって $A \cup \phi \subset A$ である。つぎに $A \cup \phi \supset A$ を示そう。A から任意に元 x をとると、当然 $x \in A$ であるから、$x \in A \cup \phi$ ($x \in A$ または $x \in \phi$) である。すなわち $A \cup \phi \supset A$ である。以上から $A \cup \phi \subset A$ かつ $A \cup \phi \supset A$ より $A \cup \phi = A$ である。

8. (1) $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow$ 「ある Λ の元 λ が存在して $x \in A_\lambda$」
   (2) 一般に $A = B \Leftrightarrow$ 「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」$\Leftrightarrow$ 「$x \in A \Leftrightarrow x \in B$」であるから、$x \in (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ を示す。$x \in (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \Leftrightarrow \neg(x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \Leftrightarrow \neg({}^\exists\lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\lambda) \Leftrightarrow {}^\forall\lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in {A_\lambda}^c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$
   (一般に $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)$ です。)

9. (1) 先の問いと同様に $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \in A$ を示す。$x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow \neg(x \notin A) \Leftrightarrow x \in A$
   (2) 任意の $A \cup B$ の元 x に対して $x \in A$ or $x \in B$ である。仮定より $A \subset B$ だから $x \in A \Rightarrow x \in A$。したがって、$x \in B$、すなわち $A \cup B \subset B$ である。
   一般に $A \cup B \supset B$ は成り立つので $A \cup B = B$ である。
   (3) 任意の $x \in A \cup A^c$ に対して $x \in A$ or $x \in A^c$ である。仮定から B が全体集合なので $A \subset B$ and $A^c \subset B$ である。したがって $x \in B$。すなわち $A \cup A^c \subset B$。
   逆に任意の $x \in B$ に対して、B が全体集合なので $x \in A$ or $x \notin A$ である。したがって $x \in A$ or $x \in A^c$ であるから $x \in A \cup A^c$。つまり $A \cup A^c \supset B$。以上から $A \cup A^c = B$。
   (4) (背理法) $A^c \cap A \neq \phi$ と仮定する。すると $x \in A \cap A^c$ が存在する。"$\cap$" の定義から $x \in A$ and $x \in A^c$。すなわち、$x \in A$ and $x \notin A$ である。これは不合理であり。仮定は誤りである。よって $A \cap A^c = \phi$。
   (5) まず $B^c = \phi$ を示そう。$B^c \neq \phi$ とすると、$x \in B^c$ が存在する。補集合の定義から $x \notin B$。B は全体集合だから明らかに $x \in B$。これは不合理、仮定は誤りである。よって $B^c = \phi$。ここで補集合をとって $B = (B^c)^c = \phi^c$ となる。

10. $x \in B$ とする。問 9 (3) より $x \in A$ or $x \in A^c$ である。$x \in A$ のとき $x \in A \cap B$ であり、仮定 $A \cap B \subset C$ より $x \in C$ となる。したがって $x \in A^c$ or $x \in C$、すなわち $B \subset A^c \cup C$ である。

11. $a \in A$ とし $a \in B$ となることを示す。$a \in A \cup C = B \cup C$ なので $a \in B$ または $a \in C$ である。$a \in C$ とすれば $a \in A \cap C = B \cap C$ であるから $a \in B$ である。よっていずれの場合も $a \in B$ となり $A \subset B$ である。

    同様に $B \subset A$ も示され $A = B$ となる。

12. $A \cap B = \phi$ と仮定する。$x \in A$ とする。条件より $A \cap B = \phi$ だから $x \notin B$、すなわち $x \in X - B$。よって $A \subset X - B$ である。

    $A \subset X - B$ とする。$A \cap B \supset \phi$ は空集合の定義から成り立つので $A \cap B \subset \phi$、すなわち $A \cap B = \phi$ を示す。$x \in A \cap B$ とすると $x \in A \subset X - B$ なので $x \notin B$ となり、これは矛盾である。よって $A \cap B = \phi$ である。

13. $A \times B = \{(x, y) | x \in A \;\; y \in B\}$

14. $(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)$

15. 任意の $(x, y) \in A \times B$ に対して、$x \in A$、$y \in B$ 。仮定より $x \in X$、$y \in Y$ だから $(x, y) \in X \times Y$ 。よって、$A \times B \subset X \times Y$。

16. $2^A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, A\}$

    A には 3 個の元があるので 2^3 で 8 個部分集合が存在します。

17. (1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$
    お互いの包含関係を示す。任意の A_n は $\mathbb{N}$ の部分集合だから、明らかに $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{N}$ である。
    次に、任意の自然数 x に対して、$x \leq x$ だから、$x \in A_x$ である。すなわち、$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ だから、$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ となる。
    以上から $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ が成り立つ。

    (2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$
    同様に、お互いの包含関係を示そう。任意の自然数 n に対して、$A_n \ni 1$ より、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \ni 1$、すなわち $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset \{1\}$ である。
    次に $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ を対偶によって示す。$1 \neq x \in \mathbb{N}$ について $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$、すなわち、ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \notin A_n$ をいえばよい。$x \geq 2$ なので $x - 1 \in \mathbb{N}$ であることに注意して、$x \notin A_{x-1}$ である。よって $x \neq 1$ ならば $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ である。
    以上から、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$ が成り立つ。

集合論問題集・解答例と解説

3 写像

1. (1) 空でない集合 X, Y に対して、X の各元に対して Y の元をひとつずつ対応させる規則を X から Y への写像といい、f が X から Y の写像であるとき $f : X \to Y$ とかく。
   (2) $f : X \to Y$, $g : A \to B$ が等しいとは $X = A, Y = B$ でありかつ任意の $x \in X = A$ に対して $f(x) = g(x)$ であるとき写像が等しいといい $f = g$ とかく。
2. 写像ではない。なぜなら、X の各元に対して Y の元が 2 つ対応しているので定義に反する。
3. 写像である。(写像の定義を確認してみよう。)
4. $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ を ($x \mapsto x - 1$) で定めるとこれは写像である。
   (定義を満たしているか確認してみよう。)
5. 合成写像の定義から、$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) - 3 = 2x - 1$ である。
   つまり、合成写像は、$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto 2x - 1)$ である。
6. (1) 像は、$f(X)(= \mathrm{Im} f) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ である。
   (2) A の逆像は $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ である。
   (3)
   - $f(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{$ 正の偶数全体 $\}$
   - $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \in \{2, 3, 4\}\} = \{1, 2\}$
7. (1) $f : X \to Y$ を写像とする。
   - f が単射であることの定義
     任意の X の元 $x,\ y$ に対して、$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ が成り立つとき f は単射であるという。
     (任意の X の元 $x,\ y$ に対して、$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ が成り立つときとしてもよい。)
   - f が全射であることの定義
     $f(X) = Y$ が成り立つとき f が全射であるという。
     (任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在するときとしてもよい。)

   (2)
   - ($\Rightarrow$)
     $f(X) = Y$ であるから明らかに $f(X) \supset Y$ である。すなわち、任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在する。
   - ($\Leftarrow$)
     写像の定義から明らかに、$f(X) \subset Y$ で、仮定より、$f(X) \supset Y$ である。すなわち $f(X) = Y$.

   (3) 問題 4 の写像が全射となっている。
   なぜなら、$\{0\} \cup \mathbb{N}$ の任意の元 x に対して $x = (x+1) - 1 = f(x+1)$ となって、$x + 1$ は $\mathbb{N}$ の元である。したがって、(2) より、f は全射である。
   (4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $x \mapsto 3x$ と定めると単射である。
   なぜなら、任意の $\mathbb{N}$ の元 $x,\ y$ に対して、$f(x) = f(y)$ とすると、$3x = 3y$ だから、$x = y$ となる。つまり、f は単射である。

   ここで、書いた写像はあくまで一例であり、問題の条件を満たす写像は他にもたくさんあります。
8. (1) $f(x) = f(y)$ とすると $x + 1 = y + 1$ なので $x = y$ である。
   (2) 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して $r/2 \in \mathbb{R}$ であり、$f(r/2) = r$ なので $r \in f(\mathbb{R})$ である。
   (3) $f(x) = f(y)$ とすれば $2x = 2y$ なので $x = y$ であり、よって f は単射である。$1 \in \mathbb{Z}$ に対して $1 = f(x) = 2x$ となる $x \in \mathbb{Z}$ は存在しないので f は全射ではない。
9. (1) 写像 f が全単射であるとは、f が全射かつ単射であることである。
   ($f : X \to Y$ が全単射であるとは任意の Y の元に対して X の元がただひとつ定まるとしてもよい。)
   (2) $f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a) + c$ と定めると全単射である。(点 $(a,\ c)$ を通る傾き $\dfrac{d-c}{b-a}$ の直線である。)
   (3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を
   $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \\ -2x + 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$
   で定めるとこれは全単射。(正の数を偶数に、負の数を奇数に対応させた。)

10. (1) $f(n) = n+1 \quad (n \in \mathbb{N})$

(2) $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = n-1 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \end{cases}$

(3) $f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$

(4) $f(x) = x^3 - x \quad (x \in \mathbb{R})$

条件を満たす写像は他にもたくさんあります。

11. (1) お互いの包含関係を示せばよい。

- 任意の $x \in f(f^{-1}(B))$ に対して、適当な $y \in f^{-1}(B)$ が存在して、$x = f(y)$ となる。ここで、$y \in f^{-1}(B)$ より、$f(y) \in B$ となって（逆像の定義）$x = f(y) \in B.$
- 逆に f は全射なので任意の B の元 x に対して、適当な $y \in X$ が存在して、$f(y) = x$ となる。ここで,$f(y) \in B$ なので $y \in f^{-1}(B)$. すなわち、$x = f(y) \in f(f^{-1}(B))$.

以上から、$f(f^{-1}(B)) = B$。

(2)
- 任意の $x \in f^{-1}(f(A))$ に対して、$f(x) \in f(A)$ となって、像の定義より、適当な $y \in A$ が存在して $f(x) = f(y)$。f は単射なので $x = y \in A$ 。
- 任意の $x \in A$ に対して、$f(x) \in f(A)$ で、逆像の定義より、$x \in f^{-1}(f(A))$

以上から、$f^{-1}(f(A)) = A$

12. (1) 明らかに、$X \cup Y \supset X,\ Y$ なので $f(X \cup Y) \supset f(X),\ f(X \cup Y) \supset f(Y)$ となる。したがって、$f(X \cup Y) \supset f(X) \cup f(Y)$ となる。

逆に $x \in f(X \cup Y)$ とする。このとき、ある $a \in X \cup Y$ が存在して $f(a) = x$ である。$a \in X$ ならば $x = f(a) \in f(X)$ であり、$a \in Y$ ならば $x = f(a) \in f(Y)$ なので $x \in f(X \cup Y)$ である。よって $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$ である。。以上から、$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(2)
- $X \cap Y \subset X,\ Y$ だから、$f(X \cap Y) \subset f(X),\ f(Y)$。つまり、$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$
- $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ は成り立たない。
  (反例）$f : \{0,\ 1\} \to \{a\}$ を $f(0) = f(1) = a$ と定め、$X = \{0\},\ Y = \{1\}$ とすると、
  $f(X \cap Y) = f(\phi) = \phi \neq \{a\} = f(X) \cap f(Y)$ 。よって等号は成立しない。

13. $x,\ y \in X$ に対して $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ とする。このとき $g(f(x)) = g(f(y))$ となって、g が単射なので、$f(x) = f(y)$。さらに、f も単射だから $x = y$。すなわち、$g \circ f$ は単射である。

14. $x \in Z$ とする。g が全射だから適当な $y \in Y$ が存在して、$x = g(y)$ となる。また f も全射だから、適当な $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる。このとき $x = g(y) = g(f(z)) = (g \circ f)(z)$。であるから $g \circ f$ は全射である。

15.
- $(\Rightarrow)$
  任意の $x,\ y \in X$ に対して、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ とすると、$g(f(x)) = g(f(y))$ となり、$g,\ f$ ともに単射であるから、$x = y$。すなわち $g \circ f$ は単射。
- $(\Leftarrow)$ 任意の $x,\ y \in Y$ に対して、$g(x) = g(y)$ とすると、f は全単射だから、$x = f(a),\ y = f(b)$ となる $a,\ b \in X$ が一意的に定まる。このとき、$g(f(a)) = g(x) = g(y) = g(f(b))$ となって、$g \circ f$ は単射なので、$a = b$。ゆえに、$x = f(a) = f(b) = Y$ より、g は単射。

16.
- 元をとって考える
- 像で考える

の二つの方法で解いてみることにする。

[解答 1] $g \circ f$ は全射だから、任意の $z \in Z$ に対して $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ となる $x \in X$ が存在する。$f(x) \in Y$ なので、$y = f(x)$ とすれば、任意の $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する。

[解答 2] $g \circ f$ は全射なので $Z = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y) \subset Z$ である。よって $Z = g(Y)$ となり g は全射である。

17. $f(x) = f(x')$ とする。このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ である。$g \circ f$ は単射なので $x = x'$ となる。

18. f が全単射とすれば、f は逆写像 f^{-1} をもつ。$g = f^{-1}$ とすれば、これは $g \circ f = id_X,\ f \circ g = id_Y$ を満たす。

$g : Y \longrightarrow X$ を $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすものとする。恒等写像は全単射なので $f \circ g = id_Y$ と問題 16 より f は全射である。また $g \circ f = id_X$ と問題 17 より f は単射である。よって f は全単射である。

19. (1) 任意の $x,\ y \in \mathrm{Map}(A,\ B)$ に対して、$f_*(x) = f_*(y)$ ならば、任意の $a \in A$ に対して、$(f_*(x))(a) = (f_*(y))(a)$、すなわち $f(x(a)) = f(y(a))$ である。ここで、f は単射なので、$x(a) = y(a)$。$a \in A$ は任意なので $x = y$ である。したがって f_* は単射である。

(2) $x \in \mathrm{Map}(A,\ C)$ とする。$f : B \to C$ は全射なので、各 $a \in A$ に対して $x(a) = f(b_a)$ なる $b_a \in B$ が存在する。このとき $y : A \to B$ を $y(a) = b_a$ で定めれば (実はここで選択公理が必要である)、$f_*(y)(a) = f(y(a)) = f(b_a) = x(a)$ となり $f_*(y) = x$ である。よって f_* は全射である。

20. (1) 任意の $x \in f(A)$ に対して適当な $y \in A$ が存在して、$x = f(y)$ となる。ここで $A \subset B$ だから、$y \in B$ となって、$x \in f(B)$。すなわち、$f(A) \subset f(B)$ である。

(2) 任意の $x \in f(A) - f(B)$ に対して、$x \in f(A)$ かつ $x \notin f(B)$ である。よって、適当な $a \in A$ が存在して $x = f(a)$ となる。また $f(a) = x \notin f(B)$ なので $a \notin B$ である。したがって $a \in A - B$ となり $x \in f(A - B)$ である。よって $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$ が成り立つ。

(3) 任意の $x \in f^{-1}(C)$ に対して、$f(x) \in C$ である。いま $C \subset D$ なので、$f(x) \in D$。つまり、$x \in f^{-1}(D)$ なので、$f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ となる。

(4) お互いの包含関係を示す。任意の $x \in f^{-1}(Y - D)$ に対して、$f(x) \in Y - D$ だから、$f(x) \in Y$ かつ $f(x) \notin D$ である。したがって、$x \in f^{-1}(Y) = X, x \notin f^{-1}(D)$ となって、$x \in X - f^{-1}(D)$ である。。つまり、$f^{-1}(Y - D) \subset X - f^{-1}(D)$ となる。

逆に、任意の $x \in X - f^{-1}(D)$ に対して、$x \in X$ かつ $x \notin f^{-1}(D)$ である。よって、$f(x) \in f(X) \subset Y, f(x) \notin D$ であり $f(x) \in Y - D$ となる。したがって $x \in f^{-1}(Y - D)$、つまり $f^{-1}(Y - D) \supset X - f^{-1}(D)$ である。

以上から $f^{-1}(Y - D) = X - f^{-1}(D)$ が成り立つ。

(5) お互いの包含関係を示す。任意の $x \in f^{-1}(C \cap D)$ に対して、$f(x) \in C \cap D$ だから、$f(x) \in C$ かつ $f(x) \in D$ である。したがって、$x \in f^{-1}(C)$ and $x \in f^{-1}(D)$ なので、$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$、すなわち $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ である。

逆に任意の $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ に対して、$x \in f^{-1}(C)$ かつ $x \in f^{-1}(D)$ である。。よって $f(x) \in C$ and $f(x) \in D$ であるから、$f(x) \in C \cap D$ である。つまり $x \in f^{-1}(C \cap D)$ だから、$f^{-1}(C \cap D) \supset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ となる。

以上から、$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ が成り立つ。

(6) お互いの包含関係を示す。任意の $x \in f(f^{-1}(C))$ に対して、適当な $y \in f^{-1}(C)$ が存在して $x = f(y)$ となる。ここで、$f(y) \in C$ だから、$x \in C$ である。また明らかに、$f^{-1}(C) \subset X$ だから、(1) より、$x \in f(f^{-1}(C)) \subset f(X)$ である。すなわち $x \in C \cap f(X)$ だから $f(f^{-1}(C)) \subset C \cap f(X)$ である。

逆に、任意の $x \in C \cap f(X)$ に対して、$x \in C$ かつ $x \in f(X)$ である。よって、適当な $y \in X$ が存在して $x = f(y)$ となる。よって、$f(y) = x \in C$ だから、$y \in f^{-1}(C)$ である。つまり、$x = f(y) \in f(f^{-1}(C))$ となって、$f(f^{-1}(C)) \supset C \cap f(X)$ である。

以上から、$f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$ が成り立つ。

21. $f^{-1}(a) = X,\ f^{-1}(x) = \phi\ (x \neq a)$

このように集合 X の任意の元を集合 Y の唯一つの元 a への写像を a への定置写像 (constant map) といいます。

22. $f : X \to Y$ を全単射とする。このとき、$\tilde{f} : 2^X \to 2^Y$ を、$A \in 2^X$ に対して $\tilde{f}(A) = f(A)$ で定めると、これが全単射であることを示す。

$g : Y \to X$ を f の逆写像とし $\tilde{f}$ と同様に写像 $\tilde{g} : 2^Y \to 2^X$ を定義する。このとき $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{2^X}$ と $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{2^Y}$ を示せば、問題 18 より $\tilde{f}$ は全単射である。

$A \in 2^X$ とするとき問題 20 (6) より $g(g^{-1}(A)) = A \cap g(2^Y)$ であるが、g は全射なので $g(2^Y) = 2^X$ であり、よって $g(g^{-1}(A)) = A$ である。これは $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{2^X}$ を意味する。

同様に $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{2^Y}$ も成り立ち $\tilde{f}$ は全単射である。

23. 問題 16, 17 より、f は全単射である。また $g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h$ である。

24. まず $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$ を示す。$x \in A \cap B$ のとき $f_A(x) = 1 = f_B(x)$ なので $f_A(x) f_B(x) = 1$ である。それ以外の場合には $f_A(x) = 0$ または $f_B(x) = 0$ なので $f_A(x) f_B(x) = 0$ である。よって $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$ である。

$f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$ を示す。(1) $x \in A \cap B$ (2) $x \in A \cap B^c$ (3) $x \in A^c \cap B$ (4) $x \in A^c \cap B^c$ の四つの場合に分けて考える。(1) のとき (右辺) $= 1 + 1 - 1 = 1 =$ (左辺) である。(2) のとき (右辺) $= 1 + 0 - 0 = 1 =$ (左辺) である。(3) のとき (右辺) $= 0 + 1 - 0 = 1 =$ (左辺) である。(4) のとき (右辺) $= 0 + 0 - 0 = 0 =$ (左辺) である。よっていずれの場合も $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$ が成り立つ。

4 関係

4.1 順序関係

1. 集合 A 上の関係「 $\leq$ 」を以下３つの条件を満たすとき「 $\leq$ 」を順序関係であるという。

   (1) 任意の $x \in A$ に対して、$x \leq x$ が成り立つ。

   (2) $x,\ y \in A$ に対して、$x \leq y$ and $y \leq x$ ならば $x = y$ が成り立つ。

   (3) $x,\ y,\ z \in A$ に対して、$x \leq y, y \leq z$ ならば $x \leq z$ が成り立つ。

2. 問 1 の 3 つの条件を確認すればよい。

   (1) 任意の $A \in 2^X$ に対して、$A \subset A$ 明らか。

   (2) $A,\ B \in 2^X$ に対して、$A \subset B$ and $B \subset A$ ならば $A = B$ (“ $=$ ”の定義)。

   (3) $A,\ B,\ C \in 2^X$ に対して、$A \subset B$ and $B \subset C$ ならば、$A \subset C$ 。明らか。

   以上から、関係「$\subset$」は順序関係。

3. $(A, \leq)$ が順序集合であって、かつ、任意の $x,\ y \in A$ に対して $x \leq y$ or $y \leq x$ が成り立つとき、順序集合 $(A, \leq)$ が全順序集合であるという。

4.
   - $(\mathbb{N}, |)$ (自然数全体の集合に “割り切れる” という関係を考えたもの)。
   - $(2^A, \subset)$ (集合 A の部分集合全体の集合に “含まれる” という関係を考えたもの)。ただし A は二つ以上の要素を持つものとする。

5. $\mathbb{R} \supset (0,\ 1)$ に対して、$(0,\ 1)$ は最小元をもたない。
   なぜなら、$x \in (0,\ 1)$ が最小元だったと仮定すると、任意の $y \in (0,\ 1)$ に対して、$x \leq y$ が成り立つ。ここで、$0 < x$ であるから、$0 < \frac{x}{2} < x < 1$ となり、x より小さい $(0,\ 1)$ の元 $\frac{x}{2}$ が存在した。よって最小元は存在しない。したがって、$\mathbb{R}$ は整列集合ではない。
   （整列集合とは任意の空でない順序部分集合が最小元を持つ集合のことです。詳しくは P.39 を見てください。）

6. (1) $B \cup C$ が B と C の両方を含む A の部分集合であることは明らかである。
   最大であることをいうには $U \supset B$ かつ $U \supset C$ である A の任意の部分集合 U に対して、$U \supset B \cap C$ を示せばよい。$x \in B \cup C$ とする。このとき $x \in B$ または $x \in C$ である。$x \in B$ のとき $U \supset B$ より、$x \in U$ であり、$x \in C$ のとき $U \supset B$ より、$x \in U$ である。よって $x \in U$ であり、$U \supset B \cup C$ である。

   (2) $B \cap C$ が B と C の両方に含まれる A の部分集合であることは明らかである。
   最小であることをいうには $U \subset B$ かつ $U \subset C$ である A の任意の部分集合 U に対して、$U \subset B \cap C$ を示せばよい。$x \in U$ とする。$U \subset B$ より、$x \in B$ であり、$U \subset C$ より、$x \in C$ である。よって $x \in B \cap C$ であり、$U \subset B \cap C$ である。

7. (1) $v, w \in V \cap W,\ \alpha$ をスカラーとすると $v + w, \alpha v \in V \cap W$ は簡単に分かるので $V \cap W$ は部分空間である。$V + W$ についても同様である。

   (2) $V \cap W$ が V と W の両方に含まれる部分空間であることは明らかである。U を V と W の両方に含まれる部分空間とすれば、明らかに $U \subset V \cap W$ となるので $V \cap W$ はそのような部分空間のうち最大のものである。

   (3) $V + W$ が V と W の両方を含む部分空間であることは明らかである。U を V と W の両方を含む部分空間とすれば、明らかに $U \supset V + W$ となるので $V + W$ はそのような部分空間のうち最小のものである。

8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に次のように定めた順序を辞書式順序という。

   (1) $a_0 = a_1$ ならば $b_0 \leq b_1$ のとき $(a_0, b_0) \leq (a_1, b_1)$ である。

   (2) $a_0 \neq a_1$ のとき $a_0 \leq a_1$ ならば $(a_0, b_0) \leq (a_1, b_1)$ である。

   この順序が整列順序であることを示す。

   $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とおき、その部分集合を Y とする。さらに $Y_1 = \{a \in \mathbb{N} \mid$ ある $b \in \mathbb{N}$ があって $(a, b) \in Y\}$ とおく。Y が空でないから Y_1 も空ではない。Y_1 は $\mathbb{N}$ の部分集合で、$\mathbb{N}$ は整列集合なので Y_1 には最小元 a_0 が存在する。

   次に $Y_2 = \{b \in \mathbb{N} \mid (a_0, b) \in Y\}$ とおく。a_0 の決め方から Y_2 は空でない $\mathbb{N}$ の部分集合で、したがって最小元 b_0 もつ。このとき a_0, b_0 の決め方から (a_0, b_0) は Y の最小元である。

9. $P(n)$ を自然数 n に関する命題だとすると、数学的帰納法とは、

(1) $P(1)$ が真である。

(2) $P(n-1)$ が真であるならば $P(n)$ も真である。

が成立するならば、すべての自然数 n に対して $P(n)$ は真である。という命題である。

（証明）$X := \{n \in \mathbb{N} | P(n)$ が真である $\} \subset \mathbb{N}$ とおく。このとき、帰納法の条件を満たすならば $X = \mathbb{N}$ であることを示す。まず、$P(1)$ が真であるから、$1 \in X.$
また、$P(n-1)$ が真であるならば $P(n)$ も真であるから、$n-1 \in X \Rightarrow b \in X.$ さらに、$X \subset \mathbb{N}$ なので $X = \mathbb{N}$ （$Peano$ の公理の (5) の条件より)。つまり、数学的帰納法は成立する。

4.2 同値関係

10. 以下 3 つの条件が成り立つとき、関係 $\sim$ は同値関係であるという。

(1) 任意の X の元 x に対して、$x \sim x$

(2) X の元 $x,\ y$ に対して、$x \sim y$ ならば $y \sim x$

(3) X の元 $x,\ y,\ z$ に対して、“ $x \sim y$ and $y \sim z$ ”ならば、$x \sim z$

同値関係とはある集合の上で、元と元が等しいとはどういうことか考え、全体をその関係によって共通部分がないように組み分け（類別）することを考えます。

11. 問 10 の同値関係の条件を 3 つ確認すればよい。

(1) 任意の $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の元 $(x,\ y)$ に対して、$xy = xy$ であるから、$x \sim x$

(2) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の元 $(x,\ y),\ (a,\ b)$ に対して、$(x,\ y) \sim (a,\ b)$ ならば $xb = ay$。 すなわち、$ay = xb$ であるから、$(a,\ b) \sim (x,\ y)$ 。

(3) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の元 $(x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2),\ (z_1,\ z_2)$ に対して、“$(x_1,\ x_2) \sim (y_1,\ y_2)$ and $(y_1,\ y_2) \sim (z_1,\ z_2)$” ならば、“$x_1y_2 = y_1x_2$ and $y_1z_2 = z_1y_2$” ならば、$x_1y_2z_2 = y_1x_2z_2 = z_1y_2x_2$。
したがって、両辺 $y_2 (\neq 0)$ で割って、$x_1z_2 = z_1x_2$。つまり、$(x_1,\ x_2) \sim (z_1,\ z_2)$

以上から、関係 $\sim$ は集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係。

この同値関係による各同値類は有理数と一対一で対応しています。したがって、この同値関係は分数は「約分」できるということを表しています。

12. 問 10 の条件を 3 つ確認すればよい。

(1) 任意の $M(n, \mathbb{R})$ の元 X に対して、$X = E^{-1}XE$ より、$X \sim X$

(2) $M(n, \mathbb{R})$ の元 $X,\ Y$ に対して、$X \sim Y$ ならば 適当な、行列 P が存在して $Y = P^{-1}XP$ となるので、$X = (P^{-1})^{-1}X(P^{-1})$。つまり $Y \sim X$

(3) $M(n, \mathbb{R})$ の元 $X,\ Y,\ Z$ に対して、“$X \sim Y$ and $Y \sim Z$” ならば、適当な行列 $P,\ Q$ が存在して $Y = P^{-1}XP$, $Z = Q^{-1}YQ$ となる。したがって、$Z = Q^{-1}(P^{-1}XP)Q = Q^{-1}P^{-1}XPQ = (PQ)^{-1}X(PQ)$ であるから、$X \sim Z$

以上から、関係 $\sim$ は集合 $M(n, \mathbb{R})$ 上の同値関係。

13. (1) 任意の 2^X の元 A に対して、恒等写像 1_A は A から A への全単射。つまり $A \sim A$

(2) 2^X の元 $A,\ B$ に対して、$A \sim B$ ならば 全単射 $f : A \to B$ が存在する。したがって、逆写像 $f^{-1} : B \to A$ が存在してこれは全単射。よって、$B \sim A$

(3) 2^X の元 $A,\ B,\ C$ に対して、“$A \sim B$ and $B \sim C$” ならば、$f : A \to B,\ g : B \to C$、それぞれ全単射が存在する。このとき合成写像 $g \circ f : A \to C$ も全単射である。ゆえに、$A \sim C$

このように集合と集合の間に全単射が存在するとき、その集合同士は“ 対等（同等）である ”といいます。

14. $\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}$ より $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}$ である。$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ とすると $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$ となる $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ が存在し、このとき $\boldsymbol{y} = \alpha^{-1}\boldsymbol{x}$ なので $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}$ である。$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{z}$ とすると $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{z}$ となる $0 \neq \alpha \in \mathbb{R},\ 0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ が存在する。このとき $\boldsymbol{x} = \alpha\beta\boldsymbol{z}$ で $\alpha\beta \neq 0$ なので $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{z}$ である。以上より $\sim$ は同値関係である。

同値類は、原点を通る一つの直線上の点の集合から原点を除いたものである。

同値類の代表としては、例えば単位球面上の点の集合で、原点に関して対称な二つの点のうち、片方だけを集めたものとなる。具体的には $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1,\ \ x_i$ のうち 0 でないはじめの成分は正 $\}$ などである。

15. (1) (i) 任意の $\mathbb{Z}$ の元 x に対して、$x - x = 0 = 2 \cdot 0$。$x \sim x$

(ii) $\mathbb{Z}$ の元 $x,\ y$ に対して、$x \sim y$ ならば 適当な整数 ℓ が存在して、$x - y = 2\ell$。よって、$y - x = -2\ell = 2(-\ell)$ で、$-\ell$ は整数だから、$y \sim x$

(iii) $\mathbb{Z}$ の元 $x,\ y,\ z$ に対して、“ $x \sim y$ and $y \sim z$ ”ならば、適当な整数 k, ℓ が存在して $x - y = 2k,\ y - z = 2\ell$ となる。つまり、$x - z = (x - y) + (y - z) = 2k - 2\ell = 2(k - \ell)$ となって、$k - \ell$ は整数だから、$x \sim z$

(2) $C_0 = \{x | x \sim 0\} = \{x | x = x - 0 = 2\ell\ (\ell \in \mathbb{Z})\} =$ 偶数全体の集合,
$C_1 = \{x | x \sim 1\} = \{x | x - 1 = 2\ell\ (\ell \in \mathbb{Z})\} = \{x | x = 2\ell + 1\ (\ell \in \mathbb{Z})\} =$ 奇数全体の集合。

(3) $\mathbb{Z} = C_0 \cup C_1$（直和）だから、$\mathbb{Z}/\sim = \{C_0,\ C_1\}$

この同値関係は整数全体の集合を「偶数か」「奇数か」で類別しています。

16. (1) $x \equiv y \pmod n$ であるとは、適当な整数 ℓ が存在して、$x - y = n\ell$ となることである。

(2)
- $x - x = 0 = n \cdot 0$ なので $x \equiv x \pmod n$ である。
- $x \equiv y \pmod n$ とする。ある $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $x - y = n\ell$ である。このとき $y - x = n(-\ell)$ なので $y \equiv x \pmod n$ である。
- $x \equiv y \pmod n$, $y \equiv z \pmod n$ とする。ある $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}$ があって $x - y = n\ell$, $y - z = n\ell'$ である。このとき $x - z = (x - y) + (y - z) = n\ell + n\ell' = n(\ell + \ell')$ なので $x \equiv z \pmod n$ である。

(3) $10 \equiv 1 \pmod 9$ だから、以下、$\pmod 9$ で考えると、$493256823 \equiv 4 + 9 + 3 + 2 + 5 + 6 + 8 + 2 + 3 = 9 + (4 + 3 + 2) + 5 + (4 + 2) + 8 + (1 + 1) + 3 \equiv (5 + 4) + 2 + (8 + 1) + 1 + 3 \equiv 2 + 1 + 3 = 6$ つまり、余りは 6 である。

結局 9 で割ったときの余りを求めるとき、各位の和から、9 を取り除いていけばよいことがわかります。（九去法）

(4) $2x - 5y = 1$ に対して、$\pmod 5$ で考えると、$2x \equiv 1$ だから、$x = 5k + 3\ (k \in \mathbb{Z})$ となる。よって、問題の式に代入すると、$1 = 2(5k + 3) - 5y = 10k + 6 - 5y$ より、$y = 2k + 1$ 。つまり、$(x,\ y) = (5k + 3,\ 2k + 1)$。

17. Jordan 標準形として同じ行列をもつものすべての集合。

5 難しいこと

5.1 濃度

1. 濃度とは対等という同値関係によって類別された同値類のことである。有限集合の場合、適当な自然数 n が存在して、$\{1, 2, \ldots, n\}$ と対等なので、単に n と書く。

   有限集合の場合は正しいのですが、「濃度」は元の個数、数ではありません。濃度を比較したり、足し算など演算を行う場合注意してください。たとえば、自然数の濃度は $\aleph_0$ とかきますが、$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ です (問題 2 参照)。足し算は、$X \cap Y = \phi$ であるとき、$|X| + |Y| = |X \cup Y|$ と定義します。(演算が矛盾なく定義されていることを確認してみてください。)

2. $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) = \phi$ である。ここで、$f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$ を x が奇数のとき、$f(x) = (\frac{x+1}{2},\ 0)$、$x$ が偶数のとき、$f(x) = (\frac{x}{2},\ 1)$ で定めると、これは全単射である。したがって、$\aleph_0 + \aleph_0 = |\mathbb{N} \times \{0\}| + |\mathbb{N} \times \{1\}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ が成り立つ。

3. $f : (-1,\ 1) \to \mathbb{R}$ を $x \mapsto \tan \frac{\pi}{2} x$ で定めれば、これは全単射である。

4. $\aleph_0 \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| \leq \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ より $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ である。(Brenstein の定理)

   問題 1 の解説より $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ であることは明らか。$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ であることについて $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $(x,\ y) \mapsto 2^{x-1}(2y-1)$ で定義すると、f は全単射である。すなわち $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ である。

5. $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \geq |\mathbb{R}|$ は明らか。また、開区間 $(0,\ 1)$ の元は $0.a_1 a_2 a_3 \cdots$ と無限 10 進小数で表すことができるので、$0.1000000 \cdots$ などの場合 $0.0999999 \cdots$ と書くことを約束して、$f : (0,\ 1) \times (0,\ 1) \to (0,\ 1)$ を

$$(0.a_1 a_2 \cdots,\ 0.b_1 b_2 \cdots) \mapsto 0.a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots$$

   で定義すると、これは単射である。したがって、2. より $|\mathbb{R}| \leq |(0,\ 1)| \leq |(0,\ 1) \times (0,\ 1)| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$ となる。以上から、Bernstein の定理より、$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

   これは平面と直線が一対一で対応していることを意味しています。

6. (背理法) $|X| \geq |2^X|$ と仮定すると、$f : X \to 2^X$: なる全射が存在する (ここで選択公理を用いている)。ここで、$B = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ とおく。f は全射だから、適当な $x \in X$ が存在して $f(x) = B$ となる。また、任意の $x \in X$ に対して、$x \in f(x)$ または $x \notin f(x)$ であるが、前者ならば $x \notin B$ で後者ならば $x \in f(x)$ なので、いずれの場合も $f(x) \neq B$ である。これは矛盾なので $|X|$ から 2^X への全射は存在しない。よって $|X| < |2^X|$ である。

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を、

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if } x \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ x & \text{if } x \notin \{0\} \cup \mathbb{N} \end{cases}$$

   で定めるとこれは全単射である。(非負整数だけずらして対応させた。)

5.2 選択公理

7. 「 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とし、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、A_λ が空でないならば、その直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も空ではない。」これを選択公理（選出公理、Axiom of choice）という。

   選択公理とは空でない集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、$f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda (f(\lambda) \in A_\lambda)$ という写像 f が存在するということを表しています。$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid a_\lambda \in A_\lambda\}$ ですが、一般に $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \mid f(\lambda) \in A_\lambda\}$ と定義します。また、集合 Λ はそのとき都合のいい濃度の集合をとります。実際、可算集合より濃度の大きい集合を添字集合として使いたいとき、番号をうつことができません。したがって、習慣的に Λ を使います。

8. 任意の集合は適当な順序によって整列集合となる。

9. 帰納的な順序集合は少なくとも一つの極大元をもつ。

   「選択公理」、「整列可能定理」、「Zorn の補題」の三つは互いに同値であることが分かっている。すなわちこのうちのどれか一つを仮定すれば、残りの二つが証明できるのである。

10. X を任意の無限集合とする。ここで、$B = 2^X - \{\phi\}$ とおく。すると B の任意の元は空でない。よって、選択公理から各 B の元から元をひとつずつ選択して、それを $(b_Y)_{Y \in B}$ とかく。

    ここで、$y_1 = b_X,\ y_2 = b_{X-\{y_1\}},\ y_3 = b_{X-\{y_1,\ y_2\}}, \cdots,\ y_n = b_{X-\{y_1,\ y_2, \cdots, y_{n-1}\}}, \cdots$ とおく。(一般に任意の $x \in X$ の元に対して $X - \{x\}$ は X の部分集合です。)

    この操作を繰り返すと、明らかに $\{y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n, \cdots\}$ は X の部分集合で、かつ可算集合である。

    このことから、可算濃度は最小の無限濃度であることがわかります。さらに、可算集合の任意の部分集合が可算集合、または有限集合であることを証明してみてください。可算集合と有限集合の間に濃度が存在しないことがわかります。(有限濃度)$< \aleph_0 < \aleph$ です。ここで、「可算濃度と連続体濃度の間に濃度が存在するかどうか」という問題を連続体問題といい、適当な公理を認めないと真偽が確定しないことがわかっています。

11. (1) 実際に条件を満たすような写像 $s : Y \to X$ を作ろう。f は全射なので、任意の $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y) \neq \phi$ である。したがって、選択公理より $s : Y \to \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = X\ (s(y) \in f^{-1}(y))$ で、写像 s が定義できる。すると、$s(y) \in f^{-1}(y)$ より、$f(s(y)) \in y$ だから、$(f \circ s)(y) = f(s(y)) = b = id_Y(y)$ となる。

    (2) 実際に条件を満たすような写像 $r : Y \to X$ を作ろう。f は単射なので $g : X \to f(X)$ を $g(x) = f(x)$ で定めると、これは全単射である。したがって、逆写像が存在して、$g^{-1} : f(X) \to X$ も全単射である。ここで、任意に $x_0 \in X$ を固定して、$r : Y \to X$ を

    $$r(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{if } x \in f(X) \\ x_0 & \text{if } x \notin f(X) \end{cases}$$

    と定めると、$(r \circ f)(x) = r(f(x)) = g^{-1}(f(x)) = x = id_X(x)$ となる。ゆえに、$r \circ f = id_X$ である。

    (3) $(\Rightarrow)$ $f : X \to Y$: 全射が存在したとすると、$f \circ s = id_Y$ となる写像 $s : Y \to X$ が存在する。ここで、id_Y : 単射より、s : 単射である (第 3 章問題 17)。よって、X から Y へ単射が存在した。

    $(\Leftarrow)$ $f : X \to Y$: 単射が存在したとすると、$r \circ f = id_X$ となる写像 $r : Y \to X$ が存在する。ここで、id_X : 全射より、r : 全射である (第 3 章問題 16)。よって、X から Y へ全射が存在した。

    この問題から、Bernstein の定理が拡張できます。Bernstein の定理とは X から Y へ単射が存在して、かつ Y から X へ単射が存在するならば、X から Y へ全単射が存在するというものでしたが、単射が存在するなら逆の向きで全射が、全射が存在するなら逆の向きで単射が存在することがこの問題からわかったので、以下の命題はすべて同値です。

    (1) $|X| = |Y|$
    (2) X から Y へ単射が存在して、かつ Y から X へ単射が存在する。
    (3) X から Y へ単射が存在して、かつ X から Y へ全射が存在する。
    (4) X から Y へ全射が存在して、かつ Y から X へ全射が存在する。