線形代数問題集 (20090208)

7 行列の標準化

7.1 最小多項式

1. A を O (零行列) でない n 次正方行列とする。実数係数多項式 $f(x) = c_\ell x^\ell + \cdots + c_1 x + c_0$ に対して

$$f(A) = c_\ell A^\ell + \cdots + c_1 A + c_0 E$$

とする。ただし E は n 次単位行列である。$f(A) = O$ となる次数最小の多項式で最高次の係数が 1 であるものを A の**最小多項式**といい $m_A(x)$ と書く。

(1) 最小多項式 $m_A(x)$ は唯一つに定まることを示せ。

(2) $f(A) = O$ ならば、ある多項式 $q(x)$ が存在して $f(x) = q(x)m_A(x)$ となることを示せ。

(3) n 次正則行列 P に対して $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ であることを示せ。

(4) n 次正則行列 P に対して $m_A(x) = m_{P^{-1}AP}(x)$ を示せ。

2. 次の行列の最小多項式を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7.2 行列の対角化可能性

3. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とする。A は対角化可能ではないこと、すなわちどのような正則行列 P に対しても $P^{-1}AP$ は対角行列にならないこと、を示せ。

7.3 べき零行列

4. A を n 次正方行列 とする。ある自然数 ℓ があって $A^\ell = O$ となるとき A を**べき零行列**という。べき零行列の固有値はすべて 0 であることを示せ。また逆にすべての固有値が 0 である行列はべき零であることを示せ。

5. 次の計算せよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \quad (2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (5)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \quad (6)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$(7)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。A^2, A^3, $\cdots$ を計算せよ。

7. べき零行列 A が対角化可能であるならば $A = O$ であることを示せ。

7.4　行列のジョルダン標準形

8. 次の行列 A のジョルダン標準型と $P^{-1}AP$ がジョルダン標準型となるような正則行列 P を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 11 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -24 & -2 & -9 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

9. 次の行列 A のジョルダン標準型と $P^{-1}AP$ がジョルダン標準型となるような正則行列 P を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(16) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. 固有多項式が $(x-a)^3$ である 3 次正方行列 A のジョルダン標準型の可能性を列挙せよ。(ジョルダンブロックを並べる順番は無視してよい。)

11. 固有多項式が $(x-a)^4$ である 4 次正方行列 A のジョルダン標準型の可能性を列挙せよ。(ジョルダンブロックを並べる順番は無視してよい。)

12. 固有多項式が $(x-a)^5$ である 5 次正方行列 A のジョルダン標準型の可能性を列挙せよ。(ジョルダンブロックを並べる順番は無視してよい。)

13. A を正方行列とする。A の固有方程式を $f(x)$ とするとき $f(A)=O$ であることを示せ。(ハミルトン・ケーリーの定理)

14. n 次正方行列 A がべき零行列とするとき $A^n=O$ をハミルトン・ケーリーの定理を用いて示せ。

15. A を正方行列とする。A が対角化可能であることと、A の最小多項式が重根をもたないことが同値であることを示せ。

16. A を正方行列とし、ある正の整数 m に対して $A^m=E$ (E は単位行列) であるとする。このとき A は対角化可能であることを示せ。

17. $M=\begin{pmatrix} 4 & -16 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$N=P^{-1}MP$ となる正則行列 P が存在するかどうかを判定し、存在するのであれば、それを具体的に一つ求めよ。

18. $M = \begin{pmatrix} 4 & -16 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 \\ -4 & -7 & 2 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ とする。$N = P^{-1}MP$ となる正則行列 P が存在するかどうかを判定し、存在するのであれば、それを具体的に一つ求めよ。

線形代数問題集・解答例と解説 (20090208)

7 行列の標準化

7.1 最小多項式

1. (1) $m_A(x), m'_A(x)$ を A の最小多項式とする。定義より $m_A(x)$ と $m'_A(x)$ の次数は等しく、またどちらも最高次係数は 1 である。よって $f(x) = m_A(x) - m'_A(x)$ とおくと、$f(x)$ の次数は $m_A(x)$ の次数よりも小さい。また $f(A) = m_A(A) - m'_A(A) = O - O = O$ である。$m_A(x)$ の次数の最小性より $f(x) = 0$ である。すなわち $m_A(x) = m'_A(x)$ となり、最小多項式は一意である。

   (2) $f(A) = O$ とする。多項式の除法により
   $$f(x) = q(x)m_A(x) + r(x), \quad \deg(r(x)) < \deg(m_A(x))$$
   なる多項式 $q(x), r(x)$ が存在する。このとき $r(A) = f(A) - q(A)m_A(A) = O$ であるから、最小多項式の次数の最小性から $r(x) = 0$ である。

   (3) $(P^{-1}AP)^i = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^iP$ である。したがって
   $$\begin{aligned} f(P^{-1}AP) &= c_\ell(P^{-1}AP)^\ell + \cdots + c_1(P^{-1}AP) + c_0E \\ &= P^{-1}(c_\ell x^\ell + \cdots + c_1x + c_0E)P = P^{-1}f(A)P \end{aligned}$$
   である。

   (4) $m_A(P^{-1}AP) = P^{-1}m_A(A)P = O$ である。よって (2) より $m_{P^{-1}AP}(x)$ は $m_A(x)$ を割り切る。また $m_{P^{-1}AP}(A) = PP^{-1}m_{P^{-1}AP}(A)PP^{-1} = Pm_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP)P^{-1} = O$ である。よって $m_A(x)$ は $m_{P^{-1}AP}(x)$ を割り切る。$m_A(x)$ と $m_{P^{-1}AP}(x)$ の最高次係数は共に 1 なので $m_A(x) = m_{P^{-1}AP}(x)$ である。

2. (1) $(x-1)^3$ (2) $x-1$ (3) $(x-1)^2$ (4) $(x-1)(x-2)(x-3)$

7.2 行列の対角化可能性

3. A の固有値は a, a であるから、正則行列 P のよって対角化されたとすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ である。このとき $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ は任意の行列と交換可能なので、$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} PP^{-1} = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}P^{-1} = A$ となって矛盾が生じる。

7.3 べき零行列

4. $\lambda : A$ のすべての固有値 , $\boldsymbol{x} : \lambda$ に対する固有ベクトル　とすると $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より $A^2\boldsymbol{x} = AA\boldsymbol{x} = A\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$ と繰り返していくと、 A が巾零行列であることから、ある自然数 ℓ があって $\lambda^\ell\boldsymbol{x} = A^\ell\boldsymbol{x} = O$ となる。よって $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であることから $\lambda^\ell = 0$　λ は複素数なので $\lambda = 0$ ゆえに、べき零行列の固有値はすべて 0 である。
   逆に、すべての固有値が 0 ならば $\lambda = 0$ なので $A^\ell\boldsymbol{x} = \lambda^\ell\boldsymbol{x} = O$ ゆえに $A^\ell = O$ である。

5. m を自然数とする。

(1) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (n = 1) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (n \neq 1) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (n = 1) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (n = 2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (n \geq 3) \end{cases}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{n-1}a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & na & \frac{1}{2}n(n-1)a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (n = 3m-2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (n = 3m-1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (n = 3m) \end{cases}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 2^{m-1} & 0 \\ 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 2^{m-1} & 0 \end{pmatrix} & (n = 2m-1) \\ \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 2^{m} & 0 \\ 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \end{pmatrix} & (n = 2m) \end{cases}$

6. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^\ell = O \ (\ell \geq 4)$ である。

7. A がべき零行列で 4 より A の固有値はすべて 0 である。また、 $f_{P^{-1}AP}(x) = |P^{-1}AP - xE| = |P^{-1}||A - xE||P| = |P|^{-1}|A - xE||P| = |A - xE| = f_A(x)$ なので A の固有値と $P^{-1}AP$ の固有値は一致するので $P^{-1}AP$ の固有値もすべて 0 である。いま A が対角化可能であることから、ある正則行列 P があって $P^{-1}AP = O$ ゆえに $A = O$ となる。

7.4 行列のジョルダン標準形

8. (1) $P = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

(2) $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

(3) $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

(4) $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

(5) $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

(6) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

(7) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9\. (8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (15) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(1)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと $f_A(x) = (x-4)^2 = \varphi_A(x)$ となり $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として $N = A - 4E$ とおくと $\widetilde{W}_4^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | N\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W}_4^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | N^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \mathbb{R}^2$ $(\leftarrow N^2 = 0)$, $\begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{a} \\ \hline N\boldsymbol{a} \\ \hline \end{array}$ (下が $\widetilde{W}_4^{(1)}$ の基底、表の全体が $\widetilde{W}_4^{(2)}$ の基底）のように $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{a} \notin \widetilde{W}_4^{(1)})$ を $\widetilde{W}_4^{(1)}$ の基底と併せて $\widetilde{W}_4^{(2)}$ の基底となるように選ぶと $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $N\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ゆえに $P = (N\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ となり $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(5)

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと $f_A(x) = (x+2)(x-2)^2 = \varphi_A(x)$ となり $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として $\widetilde{W}_{-2} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | (A + 2E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{r\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | (A-2E)^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | r,\ s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(= \widetilde{W}_2^{(2)})$, $N = A - 2E$ とおき $\widetilde{W}_2^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | N\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{a} \\ \hline N\boldsymbol{a} \\ \hline \end{array}$ (下が $\widetilde{W}_2^{(1)}$ の基底、表の全体が $\widetilde{W}_2^{(2)}$ の基底）のように $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{a} \notin \widetilde{W}_2^{(1)})$ を $\widetilde{W}_2^{(1)}$ の基底と併せて $\widetilde{W}_2^{(2)}$ の基底となるように選ぶと $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $N\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ゆえに $P = (\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ N\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となり $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(6)

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ とおくと $f_A(x) = (x-4)^3,\ \varphi_A(x) = (x-4)^2$ となり $N = A - 4E$ とおくと $\widetilde{W}_4^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | N\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W}_4^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | N^2\boldsymbol{x}\} = \mathbb{R}^3$ $(\leftarrow N^2 = 0)$, $\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{a} & \\ \hline N\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \hline \end{array}$ (下の行が $\widetilde{W}_4^{(1)}$ の基底、表の全体が $\widetilde{W}_4^{(2)}$ の基底）のように $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{a} \notin \widetilde{W}_4^{(1)})$ を $\widetilde{W}_4^{(1)}$ の基底と併せて $\widetilde{W}_4^{(2)}$ の基底となるように選ぶと $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $N\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ さらに $\{N\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ が $\widetilde{W}_4^{(1)}$ の基底となるように $\boldsymbol{b}$ を選ぶと $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ゆえに $P = (N\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となり $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

13. $xE-A$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とする。その余因子を
$\Delta_{ij} = b_{ij,0}x^{n-1} + b_{ij,1}x^{n-2} + \cdots + b_{ij,n-1},\ B_k = \begin{pmatrix} b_{11,k} & \cdots & b_{n1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n,k} & \cdots & b_{nn,k} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$
とおくと $B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \cdots + B_{n-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$ と $xE-A$ の余因子行列で表せる。いま
$(xE-A)\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}(xE-A) = |xE-A|E$ が成り立つので
$(xE-A)(B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \cdots + B_{n-1}) = (B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \cdots + B_{n-1})(xE-A) = |xE-A|E$
$AB_k = B_kA \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$ なので上の式の x に A を代入することができて $f_A(A) = (AE-A)(B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \cdots + B_{n-1}) = 0$ となる。

14. n 次正方行列 A はべき零行列なので、すべての固有値は 0 であることから $f_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i) = x^n$ ここで、ハミルトン・ケーリーの定理より $A^n = f_A(A) = O$

15. A が対角化可能であるとする。問 1 の (4) より A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ と $P^{-1}AP$ の最小多項式 $\varphi_{P^{-1}AP}(x)$ が一致することから A は対角行列である。 A の固有値の中で異なるものの全体を $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ とする。すると $(A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_sE) = O$ が成り立つ。さらに $\varphi(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$ とすると $\varphi(A) = O$ となるので問 1 の (2) より $\varphi(x)$ は $\varphi_A(x)$ で割り切れて $\varphi_A(x)$ はすべての固有値を解としているので $\varphi_A(x) = \varphi(x)$ ゆえに A の最小多項式は重根をもたない。
逆に、 A の最小多項式が重根をもたないとすると、異なる固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ に対して $\varphi_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$ と表せる。ハミルトン・ケーリーの定理より $(A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_sE) = \varphi_A(A) = O$ が成り立つ。また、 A, B を n 次正方行列として考えると、第 5 章の問 6 の (2) より $rank\ (AB) \geq rank\ A + rank\ B - n$ が成り立つので $0 = rank\ O = rank\ ((A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_sE)) \geq rank\ ((A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_{s-1}E)) + rank\ (A-\lambda_sE) - n \geq \cdots \geq rank\ (A-\lambda_1E) + \cdots + rank\ (A-\lambda_sE) - (s-1)n = \sum_{i=1}^{s}(rank\ (A-\lambda_iE) - n) + n$ よって $\sum_{i=1}^{s}(n - rank\ (A-\lambda_iE)) \geq n$ いま $W_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda_iE)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおくと $dim\ W_{\lambda_i} = dim\ (A-\lambda_iE)^{-1}(\boldsymbol{0}) = n - (A-\lambda_iE)(\mathbb{C}^n) = n - rank\ (A-\lambda_iE)$ より $\sum_{i=1}^{s} dim\ W_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s}(n - rank\ (A-\lambda_iE)) \geq n$ 一方 $W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s} \subset \mathbb{C}^n$ なので $\sum_{i=1}^{s} dim\ W_{\lambda_i} = dim\ (\sum_{i=1}^{s} W_{\lambda_i}) \leq n$ ゆえに $\mathbb{C}^n = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$ となる。つまり $\mathbb{C}$ が 固有空間 W_{λ_i} の直和なので $\mathbb{C}$ の基底として固有ベクトルだけからなるものをとれる。いま $dim\ W_{\lambda_i} = n_i$ として、基底 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{a}_k\ (n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1 \leq k \leq n_1 + \cdots + n_i)$ が W_{λ_i} の基底になるようにとる。このとき $A\boldsymbol{a}_k = \lambda_i\boldsymbol{a}_k$ よって、 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に関して A は対角行列で表せる。ゆえに $P = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とおけば $P^{-1}AP$ は対角成分が $\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, \cdots, \lambda_s$ でそれ以外の成分はすべて 0 とする行列になる。ゆえに、 A が対角化可能であることが示せた。

16. $f(x) = x^m - 1$ とおくと $f(A) = O$ である。よって A の最小多項式は $f(x)$ を割り切る。$f(x)$ は重根をもたないので、A の最小多項式も重根をもたない。よって A は対角化可能である (問 15 参照)。

17. $M,\ N$ の固有多項式はともに $(x-1)^3$ で等しく、また最小多項式も $(x-1)^3$ で等しい。よってジョルダン標準型を考えれば、問題のような正則行列 P は存在する。実際、ジョルダン標準型を与えるような正則行列を求め、

$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とすれば $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R^{-1}NR$ となっているので、求める P は $P = RQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

18. M, N の固有多項式はともに $(x-1)^3$ で等しいが、最小多項式はそれぞれ $(x-1)^3$, $(x-1)^2$ で等しくない。よってジョルダン標準型を考えれば、問題のような正則行列 P は存在しない。