線形代数問題集 (20090208)

6　対称行列の対角化

6.1　固有値と固有ベクトル

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

   (1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

   (2) $A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

   (3) (1) で求めたベクトルのうち $\mathbf{0}$ でないものを $\boldsymbol{x}_1$, (2) で求めたベクトルのうち $\mathbf{0}$ でないものを $\boldsymbol{x}_2$ とする。この二つのベクトルを列ベクトルとして並べた行列を P とする。$P^{-1}AP$ を計算せよ。

   (4) c を 1 でも 3 でもない実数とする。このとき $A\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

2. 次の行列の固有多項式、固有値、および各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。

   (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ （n 次）

3. 次の n 次正方行列の固有多項式、固有値、および各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ で $i > j$ のとき $a_{ij} = 0$ であるものを考える。A の固有値を求めよ。

5. A を実数を成分とする正方行列とする。複素数 λ が A の固有値であれば、その複素共役 $\bar{\lambda}$ も A の固有値であることを示せ。

6. M を正方行列とし $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_rx^r$ を多項式とする。$f(M) = a_0E + a_1M + \cdots + a_rM^r$ とおいて、これを **$f(x)$ に M を代入した行列**という。ただし E は単位行列である。$\boldsymbol{v}$ が M の固有値 λ に対する固有ベクトルとするとき、$\boldsymbol{v}$ は $f(M)$ の固有値 $f(\lambda)$ に対する固有ベクトルであることを示せ。(特に $f(\lambda)$ は $f(M)$ の固有値である。)

7. A を実正方行列とする。正則行列 P に対して $P^{-1}AP$ は対角行列であるとする。このとき、任意の実数係数多項式 $f(x)$ に対して $P^{-1}f(A)P$ も対角行列であることを示せ。

8. A を正則行列とする。λ を A の固有値とし $\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルとすると $\boldsymbol{x}$ は A^{-1} の固有値 λ^{-1} に対する固有ベクトルであることを示せ。

9. A を直交行列とする (問 1.20 参照)。A の固有値は長さ 1 の複素数であることを示せ。ただし、複素数 α に対して、その**長さ**とは $\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$ のことをいう。

10. $A : n$ 次正方行列 $, W \subset \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x} \in W$ に対して、 $AW = \{A\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in W\}$ と考えるとき、次の条件の下で $AW \subset W$ を満たしていることを示せ。

    (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix},\ W = \{(x,0,0) | x \in \mathbb{R}\}$

    (2) $W = W_\lambda := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$

    (3) $W = \widetilde{W}_\lambda := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda E)^l\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\ (\exists l \in \mathbb{N})\}$

6.2 対称行列の対角化

11. 次の対称行列 A の $T^{-1}AT$ が対角行列となるような直交行列 T を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 4 & -12 & 6 \\ -12 & 36 & -18 \\ 6 & -18 & 9 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. 次のエルミート行列 A の $U^{-1}AU$ が対角行列となるようなユニタリー行列 U を求めよ。(ただし、 i, ω はそれぞれ虚数単位、1 の 3 乗根を表すものとする。)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{pmatrix}$

13. 実対称行列の固有値は実数であることを示せ。

14. 実交代行列の固有値は純虚数であることを示せ。

15. A を実対称行列、λ, μ を A の相異なる固有値、$\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu$ をそれぞれ対応する固有ベクトルとする。このとき $\boldsymbol{v}_\lambda$ と $\boldsymbol{v}_\mu$ は直交することを示せ。

16. 行列 $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ に対して
$M^n = \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix}$ $(A - B = (a-b)^n,\ A + 2B = (a+2b)^n)$ を M を対角化することによって示せ。(帰納法でも示せる。)

6.3 2 次形式

17. 次の 2 次形式を標準形に変形せよ。
(1) $2xy = 1$ (2) $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ (3) $6x^2 + 4xy + 9y^2 + 4\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y = 0$
(4) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0$

6　対称行列の対角化

6.1　固有値と固有ベクトル

1. (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$ （ただし、 t は任意の実数）

   (2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ （ただし、 t は任意の実数）

   (3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (4) $c = 0, 4$ のとき $\boldsymbol{x}$ は解を持ち $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ （ただし、 t は任意の実数）

2. (1)　固有多項式は $(x-1)^2$,　固有値は 1 ,　それに対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (2)　固有多項式は $(x-i)(x+i)$,　固有値は $i, -i$,　固有値 i に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$, 固有値 $-i$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

   (3)　固有多項式は $(x-1)(x-2)(x-3)$,　固有値は $1, 2, 3$,　固有値 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 固有値 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 固有値 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (4)　固有多項式は $(x-1)(x-2)^2$,　固有値は $1, 2$,　固有値 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (5)　固有多項式は $(x-2)^3$,　固有値は 2 ,　それに対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (6)　固有多項式は $(x-2)^3$,　固有値は 2 ,　それに対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (7)　固有多項式は $x(x+1)(x-3)$,　固有値は $0, -1, 3$,　固有値 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 固有値 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (8)　固有多項式は $(x-1)^3(x+1)^2$,　固有値は $1, -1$,　固有値 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 固有値 -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(9)　固有多項式は x^n,　固有値は 0 ,　それに対する固有空間の基底は n 個の成分で $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を標準ベクトルとする。

   A は実対称行列なので対角化可能である。A の階数は 1 なので、固有値 0 を重複度 $n-1$ でもつ。$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i$ が固有値 n に対する固有ベクトルであることはすぐに分かる。したがって、固有多項式は $x^{n-1}(x-n)$ で、固有値は $0, n$ である。

   固有値 n に対する固有空間は 1 次元で、その基底は $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i$ である。

   固有値 0 に対する固有空間は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間に一致し、したがって、その基底は、例えば、$\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_n$ である。

4. 固有方程式は $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$ であり、よって固有値は $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ である。

   総積記号 $\prod_{i=1}^n$ は総和記号 $\sum_{i=1}^n$ と似た記号で、すべての積をとるという意味である。

5. A の固有多項式を $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ とする。A は実行列なので、すべての係数 a_i は実数である。λ が A の固有値なので $f(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i = 0$ である。この式の複素共役を考えれば、すべての係数 a_i が実数なので $\sum_{i=0}^n a_i \overline{\lambda}^i = 0$、すなわち $f(\overline{\lambda}) = 0$ となり $\overline{\lambda}$ も A の固有値である。

6. $M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ であるから、任意の $i \geq 1$ について $M^i\boldsymbol{v} = \lambda M^{i-1}\boldsymbol{v} = \cdots = \lambda^i\boldsymbol{v}$ が成り立つ。また $i = 0$ でも $M^0 = E$ と見れば、これは正しい (ただし $\lambda = 0$ のときは $0^0 = 1$ と考える)。よって $f(M)\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^r a_i M^i \boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^r a_i \lambda^i \boldsymbol{v} = f(\lambda)\boldsymbol{v}$ が成り立つ。これは $\boldsymbol{v}$ が $f(M)$ の固有値 $f(\lambda)$ に対する固有ベクトルであることを意味している。

7. $P^{-1}AP$ は対角行列であるから問 6 より $f(P^{-1}AP)$ も対角行列である。ここで $f(P^{-1}AP) = \sum_{i=0}^r a_i (P^{-1}AP)^i = \sum_{i=0}^r a_i P^{-1}A^iP = P^{-1}(\sum_{i=0}^r a_i A^i)P = P^{-1}f(A)P$ なので $P^{-1}f(A)P$ も対角行列である。

8. A が正則行列なので $\lambda \neq 0$ であることに注意する。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である。両辺に左から A^{-1} をかけて λ で割れば $\lambda^{-1}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}$ である。

9. λ を直交行列 A の固有値とし $\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である。内積を考えて $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。一方、問 8 と A が直交行列であることにより $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = ({}^t\overline{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。よって $\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ で $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$ である。よって $\lambda\overline{\lambda} = 1$ となり λ の長さは 1 である。

10. (1) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ ゆえに $AW \subset W$

    (2) $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (A - \lambda E)(A\boldsymbol{x}) = (A^2 - \lambda A)\boldsymbol{x} = A(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow A\boldsymbol{x} \in W_\lambda$

    (3) $(A - \lambda E)^l\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (A - \lambda E)^l(A\boldsymbol{x}) = (A - \lambda E)^{l-1}(A^2 - \lambda A)\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{l-1}A(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = A(A - \lambda E)^l\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow A\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}_\lambda$

6.2　対称行列の対角化

11. (1) $T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる。

    (2) $T = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

    (3) $T = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ となる。

    (4) $T = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ となる。

    (5) $T = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

(6) $T = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

(7) $T = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる。

(8) $T = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$ となる。

(9) $T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

12. (1) $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

(2) $U = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2i & \sqrt{2}i \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ に対して $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

(3) $U = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\omega & -\omega^2 & \sqrt{2}\omega^2 \\ \sqrt{3} & -\omega & \sqrt{2}\omega \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ に対して $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

13. A を実対称行列とする。$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は複素ベクトルの内積を表すものとする。λ を A の固有値とし $\boldsymbol{x}$ をそれに対する固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である。よって、内積が複素ベクトルの内積であることに注意して $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。一方で A は実対称行列なので $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A\boldsymbol{x}} = ({}^t\overline{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。よって $\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。ここで $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ で $\overline{\lambda} = \lambda$ である。これは λ が実数であることを意味する。

14. A を実交代行列とする。$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は複素ベクトルの内積を表すものとする。λ を A の固有値とし $\boldsymbol{x}$ をそれに対する固有ベクトルとする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である。よって、内積が複素ベクトルの内積であることに注意して $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。一方で A は実交代行列なので $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A\boldsymbol{x}} = ({}^t\overline{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (-A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (-\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。よって $\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ である。ここで $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ で $\overline{\lambda} = -\lambda$ である。これは λ が純虚数であることを意味する。

15. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をそれぞれ λ, μ に対応する固有ベクトルとする。(問 13 より、これらはすべて実数の範囲でとることが出来る。) $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y}$ である。内積について $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である。ここで A が対称行列であることにより $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ が成り立つので $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である。$\lambda \neq \mu$ と仮定しているので $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である。

16. M の固有多項式は $f_M(l) = |lE - M| = \begin{vmatrix} l-a & -b & -b \\ -b & l-a & -b \\ -b & -b & l-a \end{vmatrix} = \{l - (a-b)\}\{l - (a+2b)\}$ から、 M の固有値 $l = a-b$ に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -b & -b & -b \\ -b & -b & -b \\ -b & -b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ を解くことによって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が候補となる。同様に $l = a+2b$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が候補となる。

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立だから $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくことによって $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$

よって $A = P\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}P^{-1}$ ゆえに

$$A^n = \left[P\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}P^{-1}\right]^n = P\begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+2b)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$= P\begin{pmatrix} A-B & 0 & 0 \\ 0 & A-B & 0 \\ 0 & 0 & A+2B \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix}$$

6.3　2 次形式

17. (1)　$X^2 - Y^2 = 1$　　(2)　$2X^2 = 1$　　(3)　$X^2 + 2Y^2 = 1$　　(4)　$(\dfrac{X}{2})^2 - Y^2 = 1$

(1)　$f(x, y) = 2xy$ とおくと係数行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となりその固有値は $1, -1$ で ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となるような直交行列 T が存在する。いま $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおくと $f(x, y) = X^2 - Y^2$ となるので、この 2 次曲線は $X^2 - Y^2 = 1$ の双曲線になる。