線形代数問題集 (20090208)

5 線形写像

5.1 線形写像

1. 線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は $f(1,1)=(-1,2)$, $f(1,-1)=(2,1)$ を満たすとする。このとき $f(2,4)$ を求めよ。
2. 線形写像 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ の像 $f(\mathbb{R}^m)$ と核 $f^{-1}(\mathbf{0})$ は、それぞれ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の部分空間であることを示せ。
3. 線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ は

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

を満たすとする。

(1) f の (標準基底に関する) 行列表示を求めよ。

(2) f の像 $f(\mathbb{R}^3)$ と核 $f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底を求めよ。

4. 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ は

$$f\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}5\\-4\\5\\-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

を満たすとする。

(1) f の (標準基底に関する) 行列表示を求めよ。

(2) f の像 $f(\mathbb{R}^4)$ と核 $f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底を求めよ。

(3) f の階数 (ランク) を求めよ。

(4) (2) で求めた $f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底を延長して $\mathbb{R}^4$ の基底にせよ。

(5) (4) で付け足したベクトルを $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_\ell$ とする。$f(\boldsymbol{a}_1),\cdots,f(\boldsymbol{a}_\ell)$ は $f(\mathbb{R}^4)$ の基底になっていることを確認せよ。

5. $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\2&1&-1&1&3\\0&3&3&1&-3\end{pmatrix}$ とし、A で定まる線型写像を $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ とする。

(1) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を解け。

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}$ を解け。

(3) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間の基底を求めよ。

(4) A の階数、$f(\mathbb{R}^5)$ の基底、$f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底をそれぞれ求めよ。

6. (1) $A\ :\ mn$ 行列、 $B\ :\ n\ell$ 行列 とするとき $rank\ AB\le min\{rank\ A, rank\ B\}$ を示せ。

(2) $A\ :\ mn$ 行列、 $B\ :\ n\ell$ 行列 とするとき $rank\ A+rank\ B-n\le rank\ AB$ を示せ。

(3) $A\ :\ mn$ 行列、$P\ :\ m$ 次正方行列、$Q\ :\ n$ 次正方行列とするとき $rank\ PAQ=rank\ PA=rank\ AQ=rank\ A$ を示せ。

5.2 表現行列

7. $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ とする。また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とする。

(1) $A\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{e}_2$ となる 2×2 行列 A を求めよ。

(2) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の一次結合として書け。

(3) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合として書け。また $A\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

(4) $B\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1,\ B\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2$ となる 2×2 行列 B を求めよ。また A と B の関係を考えよ。

8. $V = \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{a}_1 = (2,1),\ \boldsymbol{a}_2 = (1,-1)$ として、 $\boldsymbol{v}_1 = (v_1, v_2) \in V$ が V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\}$ に関して対応する数ベクトルを (x_1, x_2) とする。次に答えよ。

(1) x_1, x_2 を v_1, v_2 で表せ。

(2) 線形写像 $f:\ V \to V$ を $f(v_1, v_2) = (3v_1 + 7v_2,\ v_1 + 3v_2)$ と定める。このとき、基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\}$ に関して f の対応する行列 A を求めよ。

(3) $\boldsymbol{a}'_1 = (0,-1),\ \boldsymbol{a}'_2 = (-2,1)$ として、 2 組の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\},\ \{\boldsymbol{a}'_1,\ \boldsymbol{a}'_2\}$ の基底の変換行列 P を求めよ。

(4) (2) の線形写像 f の基底 $\{\boldsymbol{a}'_1,\ \boldsymbol{a}'_2\}$ に関して f の対応する行列 A' を求めよ。

(5) $P^{-1}AP = A'$ が成立することを確かめよ。

線形代数問題集・解答例と解説 (20090208)

5 線形写像

5.1 線形写像

1. $(1,1), (1,-1)$ は一次独立で $\mathbb{R}^2$ の基底であるから、任意のベクトルはこれらの一次結合で書くことが出来る。$(2,4) = a(1,1) + b(1,-1)$ とおいて、これを解くと $a = 3, b = -1$ となる。よって $f(2,4) = f(3(1,1) - (1,-1)) = 3f(1,1) - f(1,-1) = 3(-1,2) - (2,1) = (-5,5)$ である。

2.
   - $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in f(\mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{R}$ とする。ある $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ が存在して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}$, $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{y}$ である。このとき $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \in f(\mathbb{R}^m)$ である。また $r\boldsymbol{x} = rf(\boldsymbol{v}) = f(r\boldsymbol{v}) \in f(\mathbb{R}^m)$ も成り立つ。よって $f(\mathbb{R}^m)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。
   - $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in f^{-1}(\boldsymbol{0})$, $r \in \mathbb{R}$ とする。このとき $f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in f^{-1}(\boldsymbol{0})$ である。また $f(r\boldsymbol{v}) = rf(\boldsymbol{v}) = r\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるから $r\boldsymbol{v} \in f^{-1}(\boldsymbol{0})$ である。よって $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である。

3. (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を標準基底とする。求める行列は $(f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)\ f(\boldsymbol{e}_3))$ である。$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。この三つのベクトルを並べて $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるから、列ベクトルを係数として

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2), \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3)$$

である。したがって

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、同様にして

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。よって求める行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

別解. A を求める行列とすると、与えられた条件より $A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。よって $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(2) $f(\mathbb{R}^3) = \langle f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3) \rangle$ であるから、(1) で求めた行列に**列に関する**基本変形を行う。これによって $f(\mathbb{R}^3)$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする 2 次元部分空間であることが分かる。

核は (1) の行列で定まる同次型連立一次方程式の解空間だから $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする 1 次元部分空間である。

4. (1) $\begin{pmatrix} 5 & -23 & 94 & 42 \\ 0 & -9 & 26 & 12 \\ 15 & -51 & 230 & 102 \end{pmatrix}$

(2) f の像 $f(\mathbb{R}^4)$ の基底は、$\begin{pmatrix} 5 & -23 & 94 & 42 \\ 0 & -9 & 26 & 12 \\ 15 & -51 & 230 & 102 \end{pmatrix}$ を列に関する基本変形によって計算するよりも $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

を計算するほうが早い。求める基底は、例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

核 $f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底は、$\begin{pmatrix} 5 & -23 & 94 & 42 \\ 0 & -9 & 26 & 12 \\ 15 & -51 & 230 & 102 \end{pmatrix}$ を行に関する基本変形によって計算した解空間の基底なので、

例えば $\begin{pmatrix} -248 \\ 130 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -102 \\ 60 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$

(3) 2

(4) (例えば) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -248 \\ 130 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -102 \\ 60 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$

(5)

$$\begin{pmatrix} 5 & -23 & 94 & 42 \\ 0 & -9 & 26 & 12 \\ 15 & -51 & 230 & 102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -248 & -102 \\ 0 & 1 & 130 & 60 \\ 0 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -23 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 15 & -51 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 0 & 9 \\ 3 & 51 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \\ 3 & -18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & s-2t+3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -s+t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

ただし、 s, t は任意の数とする。このことから

(1) $\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が上からすぐに分かる。

(4) A の階数は 3 、$f(\mathbb{R}^5)$ の基底は A の列に関する基本変形により例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ 、 $f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底は (3) と同じことを言っているので $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. (1) $A=(a_{ij}), B=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ とおくと $AB=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\boldsymbol{b}_j \end{pmatrix}$ より、 AB の各行ベクトルは B の各行ベクトルの一次結合であるから $rank\ (AB) = rank\ \{AB$ の各行ベクトル $\} \leq rank\ \{B$ の各行ベクトル $\} = rank\ B$
同様にして、 $rank\ AB \leq rank\ B$ も示せるので、 $rank\ AB \leq min\{rank\ A, rank\ B\}$ は示せた。

(2) m 次元ベクトル空間を V^m, ℓ 次元ベクトル空間を V^ℓ とおくと $rank(AB) = dim\ (ABV^\ell) = dim\ (BV^\ell) - dim\ (A^{-1}\{\mathbf{0}\} \cap BV^\ell) \geq dim\ (BV^\ell) - dim\ (A^{-1}\{\mathbf{0}\}) = dim\ (BV^\ell) - (m - dim\ AV^m) = rank\ A + rank\ B - m$

(3) (1) を用いると P は正則だから $rank\ A = rank\ AQQ^{-1} \leq rank\ AQ = rank\ A$ よって $rank\ AQ = rank\ A$ 同様にして他も示せる。

5.2 表現行列

7. (1) $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$

(3) $\boldsymbol{x} = (\frac{x}{3}+\frac{y}{3})\boldsymbol{a}_1 + (-\frac{x}{3}+\frac{2y}{3})\boldsymbol{a}_2,\ A\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+2y \\ -x+y \end{pmatrix}$

(4) $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B は A の逆行列になる。

8. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 \\ \frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $P=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $A'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ となることを確かめる。