線形代数問題集 (20090208)

4　ベクトル空間

4.1　ベクトルの一次独立、一次従属

1. 以下のベクトルの集合が一次独立か一次従属かを答えよ。

   (1) $(2,1,1,2,1)$, $(1,0,1,0,1)$, $(1,2,3,0,1)$, $(3,2,1,2,-1)$, $(0,1,0,1,1)$

   (2) $(1,2)$, $(3,4)$

   (3) $(1,2,3)$, $(1,1,1)$, $(-1,0,1)$

   (4) $(1,2,3,4)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,0,0)$

   (5) $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$, $(1,1,1,1)$

2. A を n 次正方行列、$\boldsymbol{v}$ を n 次元列ベクトルとする。正の整数 n について $A^n\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, $A^{n+1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるとする。このとき $\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{v}$, $A^2\boldsymbol{v}$, $\cdots$, $A^n\boldsymbol{v}$ は一次独立であることを示せ。

3. $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を一次独立な n 次元列ベクトルとし、P を n 次正則行列とする。このとき $P\boldsymbol{v}_1, \cdots, P\boldsymbol{v}_r$ も一次独立であることを示せ。

4. $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を n 次元列ベクトルとし、A を (m,n) 行列とする。$A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_r$ が一次独立であるならば、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ も一次独立であることを示せ。

4.2　ベクトル空間とその部分空間

5. V をベクトル空間とし、W を V の空でない部分集合とする。W が V の**部分空間**であることの定義を述べよ。

6. $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ をベクトルとし k をスカラーとする。$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_1 \rangle$ であることを示せ。

7. $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$ を n 次元ベクトルとする。これらの一次結合全体の集合

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{a}_i \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq r) \right\}$$

   は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

8. W_1, W_2 を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。W_1 の元と W_2 の元の和として書けるベクトル全体の集合を $W_1 + W_2$ と書く。すなわち

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{x}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in W_2\}$$

   である。$W_1 + W_2$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

4.3　ベクトル空間の基底と次元

9. (1) $(1,-1,2,3)$, $(0,1,-1,-2)$, $(-1,3,1,2)$, $(5,-8,3,3)$, $(-5,7,-7,-10)$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間の一組の基底を求めよ。

   (2) $(1,0,1,0,1,0)$, $(2,1,1,0,-1,0)$, $(1,1,0,0,-2,0)$, $(1,1,1,1,0,1)$, $(0,-1,0,-1,1,-1)$ で張られる $\mathbb{R}^6$ の部分空間の一組の基底を求めよ。

10. 次のベクトル空間の次元と一組の基底を求めよ。

   (1) $\mathbb{R}^4$ 上の元 (x_i) で

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

   を満たすものの全体

   (2) $\mathbb{R}^4$ 上の $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ の張る部分空間

(3) 3 次以下の実係数多項式の空間上で $1+x+x^2+x^3,\ 1+x^2+2x^3,\ x-x^3$ の張る部分空間

11. $\boldsymbol{a}_1=(1,0,1,0,1), \boldsymbol{a}_2=(1,0,-1,0,1), \boldsymbol{a}_3=(1,0,1,1,-1)$ とする。$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを示せ。また $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_5$ が $\mathbb{R}^5$ の基底になるように $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ を一組求めよ。

12. 次の線形空間の一組の基底と次元を求めよ。

(1) n 次実対称行列全体の集合 (${}^tA=A$ なる実正方行列の全体)

(2) n 次実交代行列全体の集合 (${}^tA=-A$ なる実正方行列の全体)

4.4 内積空間

特に断らない限り、実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の内積 $(\ ,\ )$ は標準内積を表すものとする。すなわち $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ に対して $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^n x_iy_i={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ である。複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の標準内積は $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}={}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ であるとする。

13. 次のベクトルの組について内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を計算せよ。ただし i は虚数単位を表すものとする。

(1) $\boldsymbol{a}=(1,1),\ \boldsymbol{b}=(2,1)$

(2) $\boldsymbol{a}=(2,1),\ \boldsymbol{b}=(1,-2)$

(3) $\boldsymbol{a}=(-1,1,2),\ \boldsymbol{b}=(3,-1,1)$

(4) $\boldsymbol{a}=(1,i),\ \boldsymbol{b}=(1,i)$

(5) $\boldsymbol{a}=(1,i),\ \boldsymbol{b}=(1,-i)$

14. $\mathbb{R}^2$ において二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ が幾何学的な意味で直交することと、その内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ が 0 となることは同値であることを示せ。同様に $\mathbb{R}^3$ の場合も考えよ。

15. $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^\perp &= \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=0\}\\ W^\perp &= \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \text{すべての } \boldsymbol{w}\in W \text{ に対して } (\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})=0\}\end{aligned}$$

とおく。

(1) $\boldsymbol{a}^\perp$, $W^\perp$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

(2) $W=\langle\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r\rangle$ のとき $W^\perp=\bigcap_{i=1}^r{\boldsymbol{a}_i}^\perp$ であることを示せ。

(3) $W_1\subset W_2 \Rightarrow {W_1}^\perp\supset {W_2}^\perp$ を示せ。

(4) $W^{\perp\perp}=W$ を示せ。

(5) W_1, W_2 を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき

$$(W_1+W_2)^\perp={W_1}^\perp\cap{W_2}^\perp,\quad (W_1\cap W_2)^\perp={W_1}^\perp+{W_2}^\perp$$

を示せ。

16. $\boldsymbol{a}_1=(1,0,1,0,1,0), \boldsymbol{a}_2=(2,1,1,0,-1,0), \boldsymbol{a}_3=(1,1,0,0,-2,0), \boldsymbol{a}_4=(1,1,1,1,0,1), \boldsymbol{a}_5=(0,-1,0,-1,1,-1)$ とする。$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_5$ で張られる $\mathbb{R}^6$ の部分空間を W とするとき $W^\perp$ の一組の基底を求めよ。

17. $\boldsymbol{a}_1=(0,1,-1,0,1), \boldsymbol{a}_2=(1,2,1,-1,0), \boldsymbol{a}_3=(-1,0,-3,1,2), \boldsymbol{a}_4=(1,1,1,-1,0)$ とし、これらのベクトルで張られる $\mathbb{R}^5$ の部分空間を V とする。V と $V^\perp$ の基底をそれぞれ求めよ。

18. $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1), \boldsymbol{a}_2=(1,2,3,4), \boldsymbol{b}_1=(1,1,3,3), \boldsymbol{b}_2=(1,0,1,0)$ とし、$V_1=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$, $V_2=\langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle$ とおく。このとき $V_1\cap V_2$ と V_1+V_2 の基底をそれぞれ求めよ。

19. $\boldsymbol{a}_1=(1,1,-1,-1), \boldsymbol{a}_2=(1,2,-1,0), \boldsymbol{b}_1=(1,2,1,2), \boldsymbol{b}_2=(1,1,1,1)$ とし、$V_1=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$, $V_2=\langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle$ とおく。このとき $V_1\cap V_2$ と V_1+V_2 の基底をそれぞれ求めよ。

20. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ において

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_1=(-1,-1,1,1),\quad \boldsymbol{u}_2=(1,1,0,0),\quad \boldsymbol{u}_3=(2,2,1,1),\\ &\boldsymbol{v}_1=(2,1,2,1),\quad \boldsymbol{v}_2=(1,0,1,0),\quad \boldsymbol{v}_3=(0,1,0,1)\end{aligned}$$

とし、部分空間 $U=\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\rangle$, $V=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\rangle$ を考える。

(1) U と V の基底をそれぞれ求めよ。

(2) $\boldsymbol{u}_i$ $(i=1,2,3)$ を (1) で求めた U の基底の一次結合として表せ。また $\boldsymbol{v}_i$ $(i=1,2,3)$ を (1) で求めた V の基底の一次結合として表せ。

(3) $U+V$ の一組の基底を求めよ。

(4) $U^{\perp}$ と $V^{\perp}$ の基底をそれぞれ求めよ。

(5) $U \cap V$ の一組の基底を求めよ。

(6) U を $U+V$ の部分空間と見て、その直交補空間を求めよ。

21. 次の (一次独立な) ベクトルの組をシュミットの直交化によって、それの生成する空間の正規直交基底にせよ。

(1) $(2,1)$, $(1,2)$

(2) $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$

(3) $(1,-1,0)$, $(-1,0,1)$, $(0,2,-1)$

(4) $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(1,0,0,-1)$

(5) $(1,-1,0)$, $(2,1,1)$, $(1,2,3)$

(6) $(1,i)$, $(i,0)$ (i は虚数単位とする)

(7) $(1+i,\ 1,\ -i)$, $(2,\ 1,\ i)$, $(i,\ -i,\ -i)$ (i は虚数単位とする)

22. $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,0,1)$ とする。これをシュミットの直交化によって正規直交基底にせよ。またベクトルの順番を変えて $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1$ を直交化せよ。

23. $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は、どれも $\mathbf{0}$ ではなく、$i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)=0$ を満たすとする。このとき $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立であることを示せ。

線形代数問題集・解答例と解説 (20090208)

4 ベクトル空間

ベクトル空間の基底の取り方は一意的ではないので、以下は解答例であり、他にも正答はある。

4.1 ベクトルの一次独立、一次従属

1. (1) 与えられたベクトルを行として並べた行列に、行の基本変形を行う。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

階数がベクトルの数 5 に等しいのでこれらのベクトルは一次独立である。

(2) 一次独立

(3) 一次従属

(4) 一次従属 (零ベクトルを含むベクトルの集合は常に一次従属である)

(5) 一次従属 (二つの等しいベクトルを含むベクトルの集合は常に一次従属である)

2. $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, A^2\boldsymbol{v}, \cdots, A^n\boldsymbol{v}$ が一次従属であると仮定すると、 $c_0\boldsymbol{v} + c_1A\boldsymbol{v} + c_2A^2\boldsymbol{v} + \cdots + c_nA^n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
いま $c_0, c_1, \cdots, c_n$ のうち 0 でない最初のものを c_i として、上の式に A^{n-i} かけると $A^{n+1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であることから $c_iA^n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となり $c_i \neq 0$ から $A^n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となって条件に反する。

3. $\sum_{i=1}^r a_iP\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ とする。P^{-1} を左からかければ $\sum_{i=1}^r a_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ である。ここで $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立なので $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ である。よって $P\boldsymbol{v}_1, \cdots, P\boldsymbol{v}_r$ は一次独立である。

4. $\sum_{i=1}^r a_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ とする。A を左からかければ $\sum_{i=1}^r a_iA\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ である。ここで $A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_r$ は一次独立なので $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ である。よって $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である。

4.2 ベクトル空間とその部分空間

5. W が V の部分空間であるとは、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と任意のスカラー r に対して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$, $r\boldsymbol{x} \in W$ となることである。

6. 任意のスカラー a_1, a_2 に対して $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = (a_1 - ka_2)\boldsymbol{v}_1 + a_2(\boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_1) \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_1 \rangle$ であるから $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subset \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_1 \rangle$ である。
任意のスカラー a_1, a_2 に対して $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2(\boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{a}_1) = (a_1 + ka_2)\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であるから $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \supset \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_1 \rangle$ である。
よって $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_1 \rangle$ である。

7. $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^r x_i\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^r y_i\boldsymbol{a}_i \in W$ とし $s \in \mathbb{R}$ とする。このとき $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^r (x_i + y_i)\boldsymbol{a}_i \in W$, $s\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^r (sx_i)\boldsymbol{a}_i \in W$ であるから W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

8. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とし $s \in \mathbb{R}$ とする。W の定義から $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W_1$ と $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 \in W_2$ で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ となるものがある。このとき $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2)$ であり、W_1, W_2 が部分空間であることから $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 \in W_2$ である。よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ である。また $s\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{x}_1 + s\boldsymbol{x}_2$ で $s\boldsymbol{x}_1 \in W_1$, $s\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ であるから $s\boldsymbol{x} \in W$ である。以上より W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

4.3 ベクトル空間の基底と次元

9. (1) (例えば) $(5, 0, 0, -4), (0, 5, 0, -1), (0, 0, 5, 9)$

(2) (例えば) $(1, 0, 0, -1, -1, -1), (0, 1, 0, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 1, 2, 1)$

10. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ゆえに、 次元は 2, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので、一組の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) 次元は 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) 次元は 2, $1 + x + x^2 + x^3,\ 1 + x^2 + 2x^3$

11. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を行として並べた行列に基本変形を行う。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

階数がベクトルの数 3 に等しいのでこれらのベクトルは一次独立である。

$\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ としては、変形後の行列の形に注目して、例えば $\boldsymbol{a}_4 = (0,1,0,0,0), \boldsymbol{a}_5 = (0,0,0,0,1)$ とすればよい。

12. E_{ij} を行列単位 (すなわち n 次正方行列で、その (i,j)-成分のみが 1 で、他の成分はすべて 0 であるもの) とする。

(1) $\{E_{ii} \mid i = 1, \cdots, n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \le i < j \le n\}$ が基底となる。よって、その次元は $n(n+1)/2$ である。

(2) $\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \le i < j \le n\}$ が基底となる。よって、その次元は $n(n-1)/2$ である。

4.4 内積空間

13. (1) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$ (2) 0 (3) -2
(4) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 1 \times \overline{1} + i \times \overline{i} = 1 \times 1 + i \times (-i) = 2$ (5) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 1 \times \overline{1} + i \times (\overline{-i}) = 1 \times 1 + i \times i = 0$

14. 幾何学的な意味で $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ の内積を考えると、 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ として $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ},\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR},\ \angle QPR = \theta$ と表わす。

このとき余弦定理より $||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}||\cos\theta$ よって $||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}||\cos\theta = \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}||^2) = \frac{1}{2}((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2) = a_1b_1 + a_2b_2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$\cos\theta = 0$ のときが幾何学的な意味の直交することであり、このとき、上の式から内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が 0 となることがいえたので同値であることが示せた。

一般に $\mathbb{R}^n$ の場合考えてみても $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ とおけば $||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}||\cos\theta = \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}||^2) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2) = \sum_{i=1}^n a_ib_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ なので $\mathbb{R}^3$ の場合も同値である。

15. (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{a}^\perp,\ r \in \mathbb{R}$ とする。このとき $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = 0$ であるから $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{a}^\perp$ である。また $(\boldsymbol{a}, r\boldsymbol{x}) = r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ であるから $r\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{a}^\perp$ である。よって $\boldsymbol{a}^\perp$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W^\perp,\ r \in \mathbb{R}$ とする。このとき、任意の $\boldsymbol{a} \in W$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = 0$ であるから $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W^\perp$ である。また、任意の $\boldsymbol{a} \in W$ に対して $(\boldsymbol{a}, r\boldsymbol{x}) = r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ であるから $r\boldsymbol{x} \in W^\perp$ である。よって $W^\perp$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

(2) $\boldsymbol{a}_i \in W$ であるから $W^\perp \subset \boldsymbol{a}_i \perp$ は任意の i について成り立つ。よって $W^\perp \subset \bigcap_{i=1}^r \boldsymbol{a}_i{}^\perp$ である。

$\boldsymbol{x} \in \bigcap_{i=1}^r \boldsymbol{a}_i{}^\perp$ とする。$\boldsymbol{b} \in W$ とすると、ある $c_i \in \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^r c_i\boldsymbol{a}_i$ である。このとき $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = (\sum_{i=1}^r c_i\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^r c_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) = 0$ である。よって $\boldsymbol{x} \in W^\perp$ となり、$W^\perp \supset \bigcap_{i=1}^r \boldsymbol{a}_i{}^\perp$ が成り立つ。

以上より $W^\perp = \bigcap_{i=1}^r \boldsymbol{a}_i{}^\perp$ である。

(3) $\boldsymbol{x} \in W_2{}^\perp \iff \forall\boldsymbol{a} \in W_2,\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \forall\boldsymbol{a} \in W_1,\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x} \in W_1{}^\perp$

(4) $\boldsymbol{a} \in W$ とすると $W^\perp = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\} = 0\ (\forall\boldsymbol{x} \in W)\}$ なので $W^{\perp\perp} = \{\boldsymbol{a} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0,\ (\forall\boldsymbol{x} \in W)\}$ と表せて $\boldsymbol{a} \in W^{\perp\perp}$ よって $W \subset W^{\perp\perp}$

また、 $dim\ W^{\perp\perp} = n - dim\ W^\perp = n - (n - dim\ W) = dim\ W$ で

$dim\ (W^{\perp\perp} + W) = dim\ W^{\perp\perp} + dim\ W - dim\ (W^{\perp\perp} \cap W) = dim\ W^{\perp\perp} + dim\ W - dim\ W = dim\ W$ よって、 $W^{\perp\perp}$ と W は一致しなければならない。

(5) $W_1+W_2\supset W_1, W_2$ より $(W_1+W_2)^\perp\subset {W_1}^\perp, {W_2}^\perp$ よって $(W_1+W_2)^\perp\subset {W_1}^\perp\cap{W_2}^\perp$ となる。逆に $\boldsymbol{x}\in{W_1}^\perp\cap{W_2}^\perp$ とすれば、任意の $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{w}_1\in W_1, \boldsymbol{w}_2\in W_2)$ に対して $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{x})=0$ よって $\boldsymbol{x}\in(W_1+W_2)^\perp$ から ${W_1}^\perp\cap{W_2}^\perp\subset(W_1+W_2)^\perp$ ゆえに $(W_1+W_2)^\perp={W_1}^\perp\cap{W_2}^\perp$ である。
もう一つのほうは、今までに示してきたことから $({W_1}^\perp+{W_2}^\perp)^\perp=({W_1}^\perp)^\perp\cap({W_2}^\perp)^\perp=W_1\cap W_2$ よって $(W_1\cap W_2)\perp=(((W_1+W_2)^\perp)^\perp)^\perp=(W_1+W_2)^\perp$ となる。

16. (例えば) $(2,0,-3,0,1,1), (0,2,-1,0,1,-1), (0,0,0,1,0,-1)$

17. V の基底は $(1,0,0,-1,1), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,-1)$ で、$V^\perp$ の基底は $(1,0,0,1,0), (0,0,1,1,1)$ である。

18. $V_1\cap V_2$ の基底は $(0,1,2,3)$、V_1+V_2 の基底は $(1,1,1,1), (0,1,2,3), (0,0,1,1)$ である。

一般に $V_1=\langle\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\rangle$, $V_2=\langle\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\rangle$ であるとき、$V_1+V_2=\langle\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\rangle$ である。
また $V_1\cap V_2$ については問 15 を用いて $V_1\cap V_2=({V_1}^\perp)^\perp\cap({V_2}^\perp)^\perp=({V_1}^\perp+{V_2}^\perp)^\perp$ を計算すればよい。

19. $V_1\cap V_2$ の基底は $(0,1,0,1)$、V_1+V_2 の基底は $(1,1,-1,-1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)$ である。

20. (1) （例えば） U の基底は $(1,1,0,0), (0,0,1,1)$, V の基底は $(1,0,1,0), (0,1,0,1)$
(2) （例えば） $\boldsymbol{u}_1=-(1,1,0,0)+(0,0,1,1), \boldsymbol{u}_2=(1,1,0,0), \boldsymbol{u}_3=2(1,1,0,0)+(0,0,1,1)$
$\boldsymbol{v}_1=2(1,0,1,0)+(0,1,0,1), \boldsymbol{v}_2=(1,0,1,0), \boldsymbol{v}_3=(0,1,0,1)$
(3) （例えば） $(1,0,0,-1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)$
(4) （例えば） $U^\perp$ の基底は $(-1,1,0,0), (0,0,-1,1)$, $V^\perp$ の基底は $(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)$
(5) （例えば） $(1,1,1,1)$ （ $U\cap V=(U^\perp+V^\perp)^\perp$ であることを用いよ。）
(6) （例えば） $(-1,1,-1,1)$ (求める空間は $(U+V)\cap U^\perp$ である。)

21. (1) $\dfrac{1}{\sqrt5}(2,1)$, $\dfrac{1}{\sqrt5}(-1,2)$
(2) $\dfrac{1}{\sqrt2}(1,1,0)$, $\dfrac{1}{\sqrt6}(1,-1,2)$, $\dfrac{1}{\sqrt3}(-1,1,1)$
(3) $\dfrac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)$, $\dfrac{1}{\sqrt6}(-1,-1,2)$, $\dfrac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$
(4) $\dfrac{1}{\sqrt2}(1,1,0,0)$, $\dfrac{1}{\sqrt6}(-1,1,2,0)$, $\dfrac{1}{2\sqrt3}(1,-1,1,3)$, $\dfrac{1}{2}(1,-1,1,-1)$
(5) $\dfrac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)$, $\dfrac{1}{\sqrt{22}}(3,3,2)$, $\dfrac{1}{\sqrt{11}}(-1,-1,3)$
(6) $\dfrac{1}{\sqrt2}(1,\ i)$, $\dfrac{1}{\sqrt2}(i,\ 1)$,
(7) $\dfrac{1}{2}(1+i,\ 1,\ -i)$, $\dfrac{1}{4}(2,\ 1+i,\ 1+3i)$, $\dfrac{1}{4}(2i,\ -1-3i,\ 1+i)$

(5)
($\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&1&2\\0&1&3\end{vmatrix}\neq 0$ よりこれらのベクトルは一次独立で基底が確かに作れることが分かる。)

$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\quad \boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}_i-\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{b}_j)}{(\boldsymbol{b}_j,\ \boldsymbol{b}_j)}\boldsymbol{b}_j\quad(i=2,\ 3),\quad \boldsymbol{f}_i=\frac{1}{||\boldsymbol{b}_i||}\boldsymbol{b}_i\quad(i=1,\ 2,\ 3)$ とおくと

$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ から $\boldsymbol{b}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ となり、これは $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ とできる。よって $\boldsymbol{b}_3=\dfrac{6}{11}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ で $\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ となる。ゆえに、求める正規直交基底は $\boldsymbol{f}_1=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2=\dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_3=\dfrac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$

22. それぞれ $\dfrac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$, $\dfrac{1}{\sqrt6}(-1,2,-1)$, $\dfrac{1}{\sqrt2}(-1,0,1)$ と $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$ である。

シュミットの直交化では、与えられたベクトルの並べ方によって、得られる正規直交基底は異なる。

23. $\sum_{i=1}^r a_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$ とする。この両辺と $\boldsymbol{v}_j$ との内積を考えれば $0=\langle\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}_j\rangle=\langle\sum_{i=1}^r a_i\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle=\sum_{i=1}^r a_i\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle=a_j\langle\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j\rangle$ である。ここで $\boldsymbol{v}_j\neq\boldsymbol{0}$ であるから $\langle\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j\rangle\neq 0$ で、よって $a_j=0$ である。これが任意の j について成り立つので $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である。