線形代数問題集 (20090208)

3　行列と行列式

3.1　逆行列

1. 次の行列に逆行列が存在するならばそれを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. 次の行列に逆行列が存在するならばそれを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. 次の行列に逆行列が存在するならばそれを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.2　行列式

4. 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

5. 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

6. 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & -1 & 9 \\ 10 & 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$ (9) $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$|AB|$ と $|BA|$ をそれぞれ求めよ。

8. $a_1, \cdots, a_n$ を実数とする。(i,j)-成分を ${a_i}^{j-1}$ として定めた $n \times n$ 行列を A とする。A の行列式を求めよ。ただし $0^0 = 1$ であるとする。

9. A を n 次正方行列とする。このとき、 A が正則行列であることと $|A| \neq 0$ であることは同値であることを示せ。

10. (1) 連立一次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ は $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ のとき、一意的に解くことができ、その解が $x_j = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{j}{\check{b_1}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$ $(j = 1, \cdots, n)$ となることを示せ。（クラーメルの公式）

(2) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ をクラーメルの公式を用いて解け。

11. (行列式の展開)

12. $A = (\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_v)$, 行ベクトル $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1},\ \cdots,\ a_{ib})$ $(i = 1, \cdots, v)$ とする。$(\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} r & (i = j) \\ \lambda & (i \neq j) \end{cases}$ のとき $|A\,{}^t\!A|$ を求めよ。

3.3 置換とその符号

13. (1) $1, 2, 3$ の置換の一つは $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と表せる。残りの置換はどのように表せるか。

    (2) (1) をそれぞれ巡回置換で表せ。(例えば、 $(1\ 2\ 3)$)

    (3) (1) のそれぞれの、置換の符号は何か。

14. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき、 $\sigma\tau,\ \sigma^{-1},\ \tau^{-1},\ \tau^{-1}\sigma\tau$ を求めよ。

3 行列と行列式

3.1 逆行列

1.
(1) $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (6) $-\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

(7) 逆行列は存在しない (8) $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

2.
(1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & -16 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{1}{70}\begin{pmatrix} -8 & 29 & 9 \\ 4 & 3 & 13 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}$ (5) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -16 & 12 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (8) 逆行列は存在しない (9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7)

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

（最後に、求めた逆行列と、もとの行列との積が単位行列になることを確認するとよい。）

(8)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ の階数は 2 であるから逆行列は存在しない。

3. (1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -18 & 47 \\ -1 & -2 & -11 & 29 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ (4) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ -12 & 6 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

3.2 行列式

4. (1) -2 (2) -7 (3) -3 (4) 2 (5) $b-a$ (6) a^2-b^2

5. (1) 113 (2) -7 (3) 62 (4) 6 (5) -39 (6) $3abc-a^3-b^3-c^3$

6. (1) 160 (2) 89 (3) 89 (4) -16 (5) 9 (6) $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ (7) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$
(8) $(x+a_1+a_2+\cdots+a_n)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ (9) $-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$
(7)

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (-1)^{2n}a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \\ & & & x \end{vmatrix} + (-1)^{2n-1}a_1 \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & x & \\ & & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n-1} \begin{vmatrix} x & & & & \\ & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix} + (-1)^n a_n \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= a_0x^n + a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

7. $|AB| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 6,\ |BA| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

BA は階数が高々 2 であることから、計算をしなくても、その行列式は 0 であることが分かる。

8. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ となる。ただし、条件からこの行列式は 0 ではない。これは n 変数多項式 $f(a_1,\cdots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ とおくことができる。すると、例えば $a_1=a_2$ ならば $f(a_1,\cdots,a_n)=0$ となる。このことから $f(a_1,\cdots,a_n)$ は a_2-a_1 で割り切れる。 同様に考えれば a_h-a_k $(1\le h<k\le n)$ で割り切れる。つまり、ある n 変数多項式 $g(a_1,\cdots,a_n)$ があって $f(a_1,\cdots,a_n)=g(a_1,\cdots,a_n)\displaystyle\prod_{1\le h<k\le n}(a_h-a_k)$ と表せるが、この両辺の次数は $\frac{n(n-1)}{2}$ なので $g(a_1,\cdots,a_n)$ は定数。しかも $a_2a_3^2\cdots a_n^{n-1}$ の係数を比較することにより 1 となるので、$g(a_1,\cdots,a_n)=1$ となる。ゆえに $|A| = \displaystyle\prod_{1\le h<k\le n}(a_h-a_k)$ となる。

9. A が正則行列とすると、ある逆行列 B があって $AB=E, BA=E$ なので $|A||B|=|AB|=|E|=1, |B||A|=|BA|=|E|=1$ ゆえに $|A|\neq 0$ である。

逆に、$|A|\neq 0$ とする。A における (i,j) 余因子を $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{array}{c|ccccc|} & & & j & & \\ & a_{11} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & a_{n1} & \cdots & \vdots & \cdots & a_{nn} \end{array}$ (この行列式の (i,j) 成分を除いたことを意味している。)と表す。すると $|A|=a_{1j}\Delta_{1j}+\cdots+a_{nj}\Delta_{nj}$ (第 j 列に関する展開)と書ける。さらに、これは δ_{jk} をクロネッカーのとすることによって(第 1 章の問 11 を参照) $\delta_{jk}|A|=a_{1j}\Delta_{1k}+\cdots+a_{nj}\Delta_{nk}$ となる。なぜなら $j=k$ の場合は $|A|=a_{1j}\Delta_{1j}+\cdots+a_{nj}\Delta_{nj}$ のことで $j\neq k$ の場合は $a_{1j}\Delta_{1k}+\cdots+a_{nj}\Delta_{nk}=$ $\begin{array}{|ccccccc|} & & j & & k & & \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}=0$ となる。すると $\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} A=|A|E$ と表せる。同様にして $|A|=a_{i1}\Delta_{i1}+\cdots+a_{in}\Delta_{in}$ (第 i 行に関する展開)とすれば $A\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}=|A|E$ も示せる。条件より $|A|\neq 0$ なので、逆行列 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$ が存在する。ゆえに A は正則行列である。

10. (1) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくと $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と表せる。

$|A|=0$ より A の逆行列が存在し、この式に解があるとすれば $\boldsymbol{x}=(A^{-1}A)\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ となり、逆に、これを上の式に代入すれば $A(A^{-1}\boldsymbol{b})=(AA^{-1})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ となることから解の一意性が示せた。A の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とすると、(問 9 の証明で示した逆行列から)

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i\Delta_{i1} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i\Delta_{in} \end{pmatrix}$$

よって $x_j=\dfrac{1}{|A|}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i\Delta_{ij}=\dfrac{1}{|A|}\begin{array}{|ccccc|} & & j & & \\ a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array}$ となる。

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-16$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-4, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-4$

ゆえに $x_1=-\frac{1}{4},\ x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$

11.

12.

$$|A\ {}^tA| = \left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_v \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_v) \\ \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_v,\ \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_v\ \boldsymbol{a}_v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix} = (r+(v-1)\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix}$$

$$= (r+(v-1)\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & r-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & r-\lambda \end{vmatrix} = (r+(v-1)\lambda) \begin{vmatrix} r-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & r-\lambda \end{vmatrix} = (r+(v-1)\lambda)(r-\lambda)^{v-1}$$

3.3 置換とその符号

13. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

    (2) ϵ または $()$, $(2\ 3)$, $(1\ 2)$, $(1\ 3\ 2)$, $(1\ 3)$

    (3) 正、負、負、正、負

14. $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$

    $\tau^{-1}\sigma\tau = \tau^{-1}(\sigma\tau) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$