線形代数問題集 (20090208)

1　ベクトルと行列

1.1　ベクトル

1. 次の計算をせよ。

(1)　$(1,2,3)+(-1,-1,-1)$　　(2)　2(0,1,0)-(1,1,1)

(3)　$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4)　$2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$　　(5)　$a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. ベクトル $(2,0,-1)$ の長さを求めよ。

3. 二つのベクトル $\boldsymbol{v}=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{w}=(1,1,0)$ のなす角 θ を求めよ。

4. 原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ と $\mathrm{P}(1,0,-1)$, $\mathrm{Q}(1,1,0)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ。

1.2　行列

5. 次の計算をせよ。

(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　(2)　$2\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(4)　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$　　(6)　$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(7)　$2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + X = 5\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -5 & -6 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

6. 次のような行列を具体的に書け。

(1) (i,j)-成分が $i+j$ であるような $(2,3)$-行列

(2) (i,j)-成分が $j-i$ であるような $(2,4)$-行列

(3) (i,j)-成分が $i=j$ のとき 1 で $i\neq j$ のとき 0 であるような $(3,3)$-行列

7. 行列 A, B で、積 AB, BA が共に定義され、$AB\neq BA$ であるような例を一つ作れ。

8. n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して、その対角成分の和、すなわち $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ を A の**トレース**といい $\mathrm{tr}(A)$ と書く。A, B を n 次正方行列とするとき $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ であることを示せ。

9. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ を、それぞれ (m,n), (n,p), (p,q) 行列とする。このとき、$(AB)C=A(BC)$ であることを示せ。

10. n 次正方行列 X, Y に対して $[X,Y]=XY-YX$ とおく。A, B, C を、それぞれ n 次正方行列とするとき、$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=O$ であることを示せ。

11. 正の数 i, j に対して

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

とおいて、これを**クロネッカーのデルタ**という。n 次正方行列 E_n を、その (i,j)-成分が δ_{ij} である行列とし、これを n **次単位行列**という。A を $m \times n$ 行列とするとき $E_m A = A = AE_n$ が成り立つことを示せ。

12. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して、(i,j)-成分が a_{ji} である $n \times m$ 行列を A の**転置行列**といい ${}^tA$ と書く。$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の転置行列 ${}^tA$ を求めよ。

13. 行列の積と転置行列について ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ が成り立つことを示せ。

14. 正則行列 A, B について $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つことを示せ。

15. 正方行列 $A = (a_{ij})$ が ${}^tA = A$ をみたすとき、A を**対称行列**という。任意の正方行列 A に対して ${}^tA + A$ は対称行列であることを示せ。

16. 正方行列 $A = (a_{ij})$ が ${}^tA = -A$ をみたすとき、A を**交代行列**という。任意の正方行列 A に対して ${}^tA - A$ は対称行列であることを示せ。

17. 交代行列の対角成分は 0 であることを示せ。

18. 対称行列かつ交代行列である行列は零行列であることを示せ。

19. 任意の正方行列は対称行列と交代行列の和として、一意的に表されることを示せ。

20. 実正方行列 A について、${}^tA = A^{-1}$ が成り立つとき、A を**直交行列**という。A, B が共に直交行列であるならば、その積 AB も直交行列であることを示せ。

1.3 行列の階数

21. 次の行列を (行に関する基本変形による) 掃き出し法によって階段行列に変形し、その階数 (ランク) を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

線形代数問題集・解答例と解説 (20090208)

1　ベクトルと行列

1.1　ベクトル

1. (1)　$(0, 1, 2)$　(2)　(-1,1,-1)　(3)　$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (4)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$　(5)　$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ \frac{80}{27} \\ -\frac{17}{27} \end{pmatrix}$

2. $||(2, 0, -1)|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

3. $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $||\boldsymbol{w}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 1 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 0 = 1$ である。よって $\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}{||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{w}||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ である。$0 < \theta < \pi$ なので $\theta = \pi/3$ である。

4. $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1, 1, 0)$ とおく。問 3 より $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ のなす角は $\theta = \pi/3$ である。よって $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ であり $\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{w}|| \sin\theta = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

1.2　行列

5. (1)　$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$　(2)　$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$　(3)　$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

   (4)　$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5)　(32)　(6)　$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

   (7)　$X = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 18 & 1 \\ 5 & -7 & 6 & 23 \\ -27 & -32 & 7 & -35 \end{pmatrix}$

6. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. **解答例 1.** $m \neq n$ とし A を (m, n)-行列、B を (n, m)-行列とすれば、AB は (m, m)-行列 (m 次正方行列)、BA は (n, n)-行列 (n 次正方行列) であるから $AB \neq BA$ である。

   解答例 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ であるから、$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell}a_{\ell k}$ である。有限和なので和の順番を入れ替えてもよいので $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}b_{k\ell}$ である。i と ℓ, j と k を対応させてみれば、これらの値は等しいことが分かる。

9. $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$ なる任意の (i, j) について、$(AB)C$ と $A(BC)$ の (i, j)-成分が等しいことを示せばよい。

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} \\ (A(BC))_{ij} &= \sum_{x=1}^{n} a_{ix}(BC)_{xj} = \sum_{x=1}^{n} a_{ix}\sum_{y=1}^{p} b_{xy}c_{yj} = \sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{p} a_{ix}b_{xy}c_{yj} \end{aligned}$$

   和は有限和なので、その順序を変えても問題なく、よってこの二つの値は等しい。

10. 項ごとに計算する。

$$\begin{aligned} [[A, B], C] &= [A, B]C - C[A, B] = (AB - BA)C - C(AB - BA) = ABC - BAC - CAB + CBA \\ [[B, C], A] &= [B, C]A - A[B, C] = (BC - CB)A - A(BC - CB) = BCA - CBA - ABC + ACB \\ [[C, A], B] &= [C, A]B - B[C, A] = (CA - AC)B - B(CA - AC) = CAB - ACB - BCA + BAC \end{aligned}$$

   この和が 0 であることはすぐに分かる。

この関係式を**ヤコビ恒等式**と呼ぶ。

11. $A=(a_{ij})$ とおく。任意の i,j に対して (E_mA の (i,j)-成分) $=\sum_{k=1}^m \delta_{ik}a_{kj}=a_{ij}$ であるから $E_mA=A$ である。また (AE_n の (i,j)-成分) $=\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}$ であるから $AE_n=A$ である。

12. ${}^tA=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{pmatrix}$

13. $A=(a_{ij})$ を $\ell\times m$ 行列、$B=(b_{ij})$ を $m\times n$ 行列とする。(${}^t(AB)$ の (i,j)-成分) $=$ (AB の (j,i)-成分) $=\sum_{k=1}^m a_{jk}b_{ki}$ であり (${}^tB{}^tA$ の (i,j)-成分) $=\sum_{k=1}^m b_{ki}a_{jk}$ であるから ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$ が成り立つ。

14. E を単位行列とする。$(AB)(B^{-1}A^{-1})=E=(B^{-1}A^{-1})(AB)$ が成り立つので $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ である。

15. 明らかに ${}^t({}^tA)=A$ であることに注意する。また一般に ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ である。これらにより ${}^t({}^tA+A)={}^t({}^tA)+{}^tA=A+{}^tA$ であるから ${}^tA+A$ は対称行列である。

16. ${}^t({}^tA-A)={}^t({}^tA)-{}^tA=A-{}^tA=-({}^tA-A)$ であるから ${}^tA-A$ は交代行列である。

17. $A=(a_{ij})$ を交代行列とすると、その (i,j)-成分について $a_{ji}=-a_{ij}$ が成り立っている。特にその対角成分については $a_{ii}=-a_{ii}$ となり $a_{ii}=0$ である。

18. $A=(a_{ij})$ を対称行列かつ交代行列とする。対称行列であることから ${}^tA=A$ であり、交代行列であることから ${}^tA=-A$ である。よって $A=-A$ となり $A=O$ である。

19. A を正方行列とする。問 15 と問 16 により $A=({}^tA+A)/2+(-{}^tA+A)/2$ は対称行列と交代行列の和である。

    一意性を示す。$A=B+C=B'+C'$, B, B' は対称行列、C, C' は交代行列とする。このとき $B-B'=C'-C$ であり、$B-B'$ は対称行列、$C'-C$ は交代行列である。よって問 18 より、$B-B'=C'-C=O$ となり $B=B'$, $C=C'$ である。よってこのような記述は一意的である。

20. ${}^tA=A^{-1}$, ${}^tB=B^{-1}$ である。問 13 と問 14 により ${}^t(AB)={}^tB{}^tA=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$ であるから AB は直交行列である。

1.3 行列の階数

21. (1) 階段行列は $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ で、よってその階数は 2 である。

    (2) 階段行列は $\begin{pmatrix}1&0&-5&-2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ で、よってその階数は 2 である。

    (3) 階段行列は $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ で、よってその階数は 4 である。

    (4) 階段行列は $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ で、よってその階数は 3 である。

    (5) 階段行列は $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&k-9\end{pmatrix}$ で、よってその階数は $k\neq 9$ のとき 3、$k=9$ のとき 2 である。

    (6) 階段行列は $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1-2a\end{pmatrix}$ で、よってその階数は $a\neq 1/2$ のとき 3、$a=1/2$ のとき 2 である。