集合論問題集

5　難しいこと

5.1　濃度

1. 集合 A, B について以下の問に答えよ。
   (1) $|A| \leq |B|$ であることの定義を述べよ。
   (2) $|A| < |B|$ であることの定義を述べよ。
   (3) $|A| = |B|$ であることの定義を述べよ。
2. $|A| \leq |B|$, $|C| \leq |D|$ であるとき $|A \times C| \leq |B \times D|$ であることを示せ。
3. ベルンシュタイン (Bernstein) の定理を述べよ。
4. 次のような全単射を具体的に構成せよ。ただし (a, b) などは区間を表わすものとする。
   (1) $a < b$ に対して $f : (0, 1) \to (a, b)$
   (2) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : [0, 1) \to [a, \infty)$
   (3) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : (0, 1) \to (a, \infty)$
   (4) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : (0, 1] \to (-\infty, a]$
   (5) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : (0, 1) \to (-\infty, a)$
   (6) $f : [0, 1] \to [0, 1)$
   (7) $f : (0, 1] \to (0, 1)$
   (8) $f : [0, 1) \to (0, 1]$
   (9) $f : (-1, 1) \to (-\infty, \infty)$
5. $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全単射を具体的に構成せよ。
6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射を具体的に構成せよ。
7. $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ を示せ。
8. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ を示せ。
9. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ への全単射を具体的に構成せよ。
10. $|X| < |2^X|$ を証明せよ。
11. $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ であることを示せ。
12. 集合 X とその真の部分集合 Y に対して、$|X| = |Y|$ である、すなわち全単射 $f : X \to Y$ が存在する、とする。このとき $|\mathbb{N}| \leq |X|$ であることを示せ。
13. $|X| \leq |\mathbb{N}|$ となる集合 X は整列順序をもつことを示せ。($|X| \leq |\mathbb{N}|$ となる集合 X を**可算集合**という。)

5.2　選択公理

14. 選択公理 (選出公理) を書け。
15. 整列可能定理を書け。
16. ツォルン (Zorn) の補題を書け。
17. X, Y を空でない集合とする。選択公理を仮定する。X から Y への全射が存在するとき、Y から X への単射が存在することを示せ。
18. 整列可能定理から選択公理を示せ。
19. 集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える。$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とおく。$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の **disjoint union** とは
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{(x, \lambda) \in A \times \Lambda \mid x \in A_\lambda\}$$
のこととし、これを $\coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ と書く。このとき $|A| \leq |\coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda|$ を示せ。ただし、選択公理を仮定するものとする。
20. (代数学の知識を仮定する。) R を単位元 1 をもつ環、I をその真のイデアルとする。このとき I を含む極大イデアルが存在することを示せ。ただしツォルンの補題を利用してよい。

集合論問題集・解答例と解説

5　難しいこと

5.1　濃度

1. (1) A から B への単射が存在する。

   (2) $|A| \leq |B|$ であって $|B| \leq |A|$ ではない。

   (3) A から B への全単射が存在する。

2. $|A| \leq |B|$ の定義が「A から B への単射が存在する」ということなので、これは第 **??** 章問 **??** (1) によって示される。

3. 「$|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ ならば、 $|A| = |B|$ である。」言い換えると「単射 $A \to B$ と単射 $B \to A$ が存在するならば、全単射 $A \to B$ が存在する。」

4. (1) $f(x) = (b-a)x + a$

   (2) $f(x) = a - 1 + 1/(1-x)$

   (3) $f(x) = a - 1 + 1/(1-x)$

   (4) $f(x) = a + 1 - 1/x$

   (5) $f(x) = a + 1 - 1/x$

   (6) $S = \{1/2^m \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とする。$x \notin S$ のとき $f(x) = x$、$x \in S$ のとき $f(x) = x/2$ で f を定めれば、これが全単射になる。

   (7) (6) の f を $(0, 1]$ に制限したもの。

   (8) $f(x) = 1 - x$

   (9) $f(x) = x/(1-x^2)$

   これによって実数の区間はすべて等しい濃度をもつことが分かる。

5. a が偶数のとき $f(a) = a/2$、a が奇数のとき $f(a) = (1-a)/2$ とすれば、この f は全単射である。

6. $f(a, b) = 2^{a-1}(2b - 1)$

7. $r \in \mathbb{Q}$ を既約分数の形に書き、その分母を r_1, 分子を r_2 とする。分母は正であるとし、整数については、その分母を 1 とする。これによって写像 $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $r \mapsto (r_1, r_2)$ が定義でき、作り方から単射である。したがって $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$ である。問 2, 5, 6 より $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ となるので $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ である。

   一方、自然な埋め込み $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ があるので $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ である。よってベルンシュタインの定理により $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ である。

8. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ なので $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ である。よって $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ であること、すなわち $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への全単射が存在しないことをいえばよい。$I = (0, 1)$ を開区間とする。$|I| = |\mathbb{R}|$ なので $\mathbb{N}$ から I への全単射が存在しないことをいえば十分である。$f : \mathbb{N} \to I$ を全単射とする。$(0, 1)$ の元を無限小数として表し

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0.a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \cdots \\
f(2) &= 0.a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \cdots \\
f(3) &= 0.a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

   と表すことにする。このとき、$b \in I$ を少数第 i 位が $f(i)$ と異なるように作る。そうすれば b は、どの $f(i)$ とも異なるので f が全単射であることに矛盾する。したがって $\mathbb{N}$ から I への全単射は存在しない。

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を、

$$
f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{if } x \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ x & \text{if } x \notin \{0\} \cup \mathbb{N} \end{cases}
$$

   で定めるとこれは全単射である。

10. $f : X \to 2^X$ $(f(x) = \{x\})$ は単射なので $|X| \le |2^X|$ である。$|2^X| \le |X|$ と仮定する。ベルンシュタインの定理より、全単射 $g : X \to 2^X$ が存在する。
$$R = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$$
とおく。$R \in 2^X$ であり、g は全単射なので $R = g(y)$ となる $y \in X$ が存在する。$y \in R$ とすると $y \notin g(y) = R$ で矛盾、$y \notin R$ とすると $y \in g(y) = R$ でやはり矛盾である。したがって、このような全単射は存在せず $|X| < |2^X|$ である。

すべてのものを含む集合が存在するとすれば、それは最大の濃度をもつはずであるが、この関係式によって、最大の濃度をもつ集合は存在しない。したがって、すべてのものを含むものは集合ではない。

11. $I = (0, 1)$ (開区間) とする。$|\mathbb{R}| = |I|$ であるから $|I \times I| = |I|$ を示せばよい。また $f : I \to I \times I$ $(f(a) = (a, 0.5))$ は単射なので $|I| \le |I \times I|$ である。$I \times I$ から I への単射を構成すればベルンシュタインの定理によって $|I \times I| = |I|$ である。

任意の $a \in I$ は $0.a_1a_2a_3 \cdots$ と無限 10 進小数で表すことができる。ここで $0.1 = 0.999 \cdots$ などと表し、有限少数は許さないこととする。$g : I \times I \to I$ を
$$g(0.a_1a_2 \cdots,\ 0.b_1b_2 \cdots) = 0.a_1b_1a_2b_2 \cdots$$
で定義すると、これは単射である。

したがって $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |I \times I| = |I| = |\mathbb{R}|$ となる。

12. $x \in X - Y$ とする。$x_1 = x$ として、帰納的に $x_{i+1} = f(x_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ とする。ただし $x_{i+1} = f(x_i) \in Y \subset X$ と見る。これによって X の部分集合 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が得られる。これがすべて異なることをいえば、$\mathbb{N} \to X$ $(i \mapsto x_i)$ は単射となり $|\mathbb{N}| \le |X|$ である。

$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j\}$ とおき、これを辞書式順序による整列集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の順序部分集合と見れば、これも整列集合である。$T = \{(i, j) \in S \mid x_i = x_j\}$ とおく。$T = \phi$ を示せばよいので、$T \ne \phi$ として矛盾を導く。

$T \ne \phi$ とすると、S が整列集合であることから T は最小元 (i_0, j_0) をもつ。$x_1 \notin Y$ であり $j > 1$ に対しては $x_j \in Y$ であるから、$x_1 \ne x_j$ である。よって $i_0 > 1$ である。また $i_0 < j_0$ であるから $j_0 > 1$ も成り立つ。このとき $x_{i_0} = x_{j_0}$ より $f(x_{i_0-1}) = f(x_{j_0-1})$ である。f は単射なので $x_{i_0-1} = x_{j_0-1}$ である。よって $(i_0 - 1, j_0 - 1) \in T$ である。しかし、これは (i_0, j_0) の最小性に反する。したがって $T = \phi$ である。

集合 X について、ある真の部分集合 Y との間に全単射が存在するとき、X を**無限集合**と定義することもある。したがって、この問は自然数の濃度 $|\mathbb{N}|$ (これを $\aleph_0$ とかき**アレフゼロ**とよむ) が無限集合の濃度のうち最小であることを示している。

13. 単射 $f : X \to \mathbb{N}$ が存在する。このとき $\mathbb{N}$ の順序によって X の順序を定めれば、それは整列順序である。すなわち、$x, y \in X$ に対して $f(x) \le f(y)$ のとき $x \le y$ と定めるのである。(第 **??** 章問 **??** 参照)

5.2 選択公理

14. 集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ は空でないとする。このとき、「各 A_λ からいっせいに一つずつ元を取り出すことができる。」

これは次のように言い換えることもできる。「直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は空でない。」

選択公理を他の標準的な公理から導くことはできない。したがって、これを使うにはこれを公理として仮定しなくてはならない。しかし Λ が有限集合であれば、他の標準的な公理から導くことができる。したがって、有限個の集合族に対して用いる場合には注意する必要はない。また、各 A_λ が可算集合 (あるいは整列集合) であれば、やはり他の標準的な公理から導くことができる。

15. 任意の集合は整列順序をもつ。

16. 帰納的順序集合は極大元をもつ。

「選択公理」、「整列可能定理」、「Zorn の補題」の三つは互いに同値であることが分かっている。すなわちこのうちのどれか一つを仮定すれば、残りの二つが証明できるのである。

17. 任意の $b \in B$ に対して $f^{-1}(b) \ne \phi$ である。各 $b \in B$ に対して $f^{-1}(b)$ から一つ元を取り、それを $g(b)$ とする (ここで選択公理を使っている)。このとき $g : B \to A$ は単射である。

第 **??** 章問 **??** とこの問により、選択公理を仮定すれば、X から Y への全射が存在することと、Y から X への単射が存在することは同値となる。

18. 集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考え、任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して A_λ は空でないとする。$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ とおく。整列可能定理より A に整列順序が存在する。この順序によって、各 A_λ も整列集合となる。このとき A_λ は (唯一つの) 最小元をもつので、それを選ぶことによって A_λ からいっせいに一つずつ元を選ぶことが出来る。

19. (証明 1)
単射 $f : A \to \coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を構成する。$x\in A$ に対して、ある $\lambda\in\Lambda$ があって $x\in A_\lambda$ である。したがって $\Lambda(x)=\{\lambda\in\Lambda \mid x\in A_\lambda\}$ とおけば、これは空ではない。$\{\Lambda(x)\}_{x\in A}$ に選択公理を用いて、写像 $g : A\to\Lambda$ が得られ、$x\in A_{g(x)}$ である。このとき $f : A\to\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を $f(x)=(x,g(x))$ で定めれば、これは単射となる。

(証明 2)
$f : \coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \to A$ を $f(x,\lambda)=x$ で定める。これが全射であることを示せば、選択公理と問 17 より単射 $g : A\to\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ が存在する。
$x\in A$ とする。ある $\lambda\in\Lambda$ が存在し $x\in A_\lambda$ である。このとき $(x,\lambda)\in\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ であり $f(x,\lambda)=x$ である。よって f は全射である。

$|\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda|$ を $\sum_{\lambda\in\Lambda}|A_\lambda|$ とも書く。特に $|\Lambda|<\infty$ である場合には $|A_1|+\cdots+|A_n|$ などの記号も用いる。

20. $\mathcal{S}$ を I を含む真のイデアル全体の集合とする。$I\in\mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}\neq\phi$ である。$\mathcal{S}$ を集合としての包含関係によって順序集合と考える。$\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{S}$ の全順序部分集合とする。$J=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}J_\lambda$ とおく。このとき J は R のイデアルで I を含む。また、各 $\lambda\in\Lambda$ について、A_λ は R の真のイデアルなので $1\notin J_\lambda$ である。よって $1\notin J$ となり $J\in\mathcal{S}$ である。したがって $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は上界 J をもち、上に有界である。よって $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合となり、ツォルンの補題によって極大元 M をもつ。このとき M は R の極大イデアルであり I を含む。