集合論問題集

3　写像

1. (1) 写像とは何か。その定義を書け。
   (2) 写像が等しいとはどういうことか。その定義を書け。

2. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ を $x \longmapsto \pm x$ で定めると、これは写像かどうかを答えよ。ただし $\mathbb{R}^+ = \{x > 0 | x \in \mathbb{R}\}$ とする。

3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto x^2$ で定めると、これは写像かどうかを答えよ。

4. 写像を具体的に一つ作れ。

5. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto x + 1,\ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $x \longmapsto 2x - 3$ で定めたとき、合成写像 $g \circ f$ を求めよ。

6. (1) 写像 $f : X \to Y$ に対して、像 $f(X)$ の定義を書け。
   (2) 写像 $f : X \to Y$ と $A \subset Y$ に対して、A の逆像 $f^{-1}(A)$ の定義を書け。
   (3) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto 2x$ で定めたとき $\mathbb{N}$ に対する像 $f(\mathbb{N})$ と $A = \{2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$ の逆像 $f^{-1}(A)$ を具体的に書け。

7. $f : X \to Y$ を写像とする。f^{-1} という記号は異なる意味で用いられることがある。これについて説明せよ。

8. (1) 全射、単射の定義を書け。
   (2) 写像 $f : X \to Y$ に対して $f(X) = Y \iff$ 「$^\forall y \in Y,\ ^\exists x \in X\ \ \text{s.t.}\ \ y = f(x)$」(任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在する）を示せ。
   (3) 全射 $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ を構成せよ。また、それが全射であることを示せ。
   (4) 恒等写像以外の単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を構成せよ。また、それが単射であることを示せ。

9. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x + 1$ で定めるとき、f は単射であることを示せ。
   (2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x$ で定めるとき、f は全射であることを示せ。
   (3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(x) = 2x$ で定めるとき、f は単射であるが全射でないことを示せ。

10. (1) 全単射の定義を書け。
    (2) 閉区間 $[a, b]$ から閉区間 $[c, d]$ への全単射を具体的に構成せよ。ただし、ここで $a < b,\ c < d$ であるとする。
    (3) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{N}$ への全単射を具体的に構成せよ。（ちょっと難かしい。）

11. (1) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への単射ではあるが全射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (2) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全射ではあるが単射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (3) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への単射ではあるが全射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (4) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全射ではあるが単射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。

12. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について以下の問に答えよ。
    (1) f が全射のとき、$Y \supset B$ に対して、$f(f^{-1}(B)) = B$ であることを示せ。
    (2) 一般には $f(f^{-1}(B)) = B$ は正しくない。この式が成り立たないような例をあげよ。
    (3) f が単射のとき、$X \supset A$ に対して、$f^{-1}(f(A)) = A$ であることを示せ。
    (4) 一般には $f^{-1}(f(A)) = A$ は正しくない。この式が成り立たないような例をあげよ。

13. $f : A \to B$ を写像とし $X \subset A, Y \subset A$ とする。
    (1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ を示せ。
    (2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ を示せ。また $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ は成り立つかどうかを考察し、成り立つならば証明し、成り立たないならば、反例を挙げよ。

14. $f : A \to B$ を写像、$b, b' \in B$ で $b \neq b'$ とする。このとき $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \phi$ であることを示せ。

15. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、$f,\ g$ ともに単射ならば $g \circ f$ も単射であることを示せ。

16. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、f, g ともに全射ならば $g \circ f$ も全射であることを示せ。

17. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、f が全単射であるとき「g が単射である」$\Leftrightarrow$「 $g \circ f$ も単射である」を示せ。

18. $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ について、$g \circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ。

19. $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ について、$g \circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ。

20. $f : X \longrightarrow Y$ について、f が全単射であるための必要十分条件は、$g : Y \longrightarrow X$ で $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ なるものが存在することである。これを示せ。ただし id_X は X の恒等写像を表すものとする。

21. $f : B \to C$ とする。$f_* : \mathrm{Map}(A,\ B) \to \mathrm{Map}(A,\ C)$ を $f_*(\psi) = f \circ \psi$ で定義する。このとき以下を証明せよ。

    (1) f が単射ならば f_* は単射である。

    (2) f が全射ならば f_* は全射である。

22. $X,\ Y$ を集合、$A,\ B$ を X の部分集合、$C,\ D$ を Y の部分集合とする。
    このとき $f : X \to Y$ に対して以下が成立することを示せ。

    (1) $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$

    (2) $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$

    (3) $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

    (4) $f^{-1}(Y - D) = X - f^{-1}(D)$

    (5) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

    (6) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$

23. $a \in Y$ を一つ固定する。$C_a : X \to Y$ を $x \mapsto a$ で定義する。このとき Y の各元に対する逆像を求めよ。

24. 集合 X から Y へ全単射が存在するとき X のべき集合 2^X から Y のべき集合 2^Y へ全単射が存在することを示せ。

25. 写像 $f : X \to Y$, $g, h : Y \to X$ が $g \circ f = id_X$, $f \circ h = id_Y$ を満たすならば、f は全単射で、$g = h$ であることを示せ。

26. 集合 X の部分集合 A に対して、$f_A \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ を

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

    で定める。(これを A の特性関数という。) $A,\ B$ を X の部分集合とすると、任意の $x \in X$ に対して

$$f_{A\cap B}(x) = f_A(x) f_B(x), \quad f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$$

    であることを示せ。

27. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{a, b, c\}$ とし、写像 $f : X \to Y$ を

$$f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = b,\ f(4) = a,\ f(5) = b$$

    で定める。このとき、以下のものを求めよ。

    (1) $f(X)$

    (2) $f(\{1, 2\})$

    (3) $f(\{1, 4\})$

    (4) $f^{-1}(a)$

    (5) $f^{-1}(c)$

    (6) $f^{-1}(\{a, c\})$

28. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とする。また $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{array}{rcll} (a, b) & = & \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}, & (\text{開区間}) \\ [a, b] & = & \{r \in \mathbb{R} \mid a \le r \le b\}, & (\text{閉区間}) \\ (a, b] & = & \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \le b\}, & (\text{半開区間}) \\ [a, b) & = & \{r \in \mathbb{R} \mid a \le r < b\}, & (\text{半開区間}) \end{array}$$

    の記号を用いる。これらはいずれも $\mathbb{R}$ の部分集合と見る。このとき、以下のものを求めよ。

(1) $f([0,1])$
(2) $f([-1,1])$
(3) $f^{-1}(4)$
(4) $f^{-1}([0,1])$
(5) $f^{-1}([-1,1])$
(6) $f(f^{-1}([0,1]))$
(7) $f(f^{-1}([-1,1]))$
(8) $f([-1,2])$
(9) $f([-1,0])$
(10) $f([-1,2]-[-1,0])$
(11) $f([-1,2])-f([-1,0])$

29. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^3-x$ で定める。このとき、以下のものを求めよ。

(1) $f(\mathbb{R})$
(2) $f^{-1}(0)$
(3) $f^{-1}(6)$

30. $f:X\to Y$ は単射であるとする。$A\subset X$ と $x\in X$ について「$x\in A \iff f(x)\in f(A)$」であることを示せ。

31. $f:A\to B$, $g:B\to C$ とする。

(1) $g\circ f$ が単射で、g が単射ではない例を作れ。
(2) $g\circ f$ が全射で、f が全射ではない例を作れ。

32. $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を写像とする。

(1) $g\circ f$ が全射で g が単射ならば f は全射であることを示せ。
(2) $g\circ f$ が単射で f が全射ならば g は単射であることを示せ。

33. f は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像で、任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して $f(a-b)=f(a)-f(b)$ をみたすものとする。

(1) $f(0)=0$ であることを示せ。
(2) $f(-a)=-f(a)$ であることを示せ。
(3) f が単射であることと $f^{-1}(0)=\{0\}$ であることが同値であることを示せ。

34. $f:A\to B$, $g:A\to C$ とする。簡単のため A, B, C はいずれも空集合ではないとする。次の条件は同値であることを示せ。

(1) ある $h:C\to B$ が存在して $f=h\circ g$ となる。
(2) $g(a)=g(a')$ ならば $f(a)=f(a')$ である。

35. 写像 $f:A\to B$, $g:C\to D$ に対して $f\times g:A\times C\to B\times D$ を $(f\times g)(a,c)=(f(a),g(c))$ で定める。

(1) f, g 共に単射であるとき $f\times g$ も単射であることを示せ。
(2) f, g 共に全射であるとき $f\times g$ も全射であることを示せ。

36. X, Y を空でない集合とする。X から Y への単射が存在するとき、Y から X への全射が存在することを示せ。

集合論問題集・解答例と解説

3 写像

1. (1) 集合 X, Y に対して、X の各元に対して Y の元をひとつずつ対応させる規則を X から Y への写像という。(f が X から Y の写像であるとき $f : X \to Y$ とかく。)

   (2) $f : X \to Y,\ g : A \to B$ が等しいとは $X = A,\ Y = B$ であり、任意の $x \in X = A$ に対して $f(x) = g(x)$ であることをいう。(このとき $f = g$ とかく。)

2. 写像ではない。なぜなら、X の各元に対して Y の元が 2 つ対応しているので定義に反する。

3. 写像である。

4. $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ を $f(x) = x - 1$ で定めるとこれは写像である。

5. 合成写像の定義から、$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) - 3 = 2x - 1$ である。つまり、合成写像は、$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ (x \mapsto 2x - 1)$ である。

6. (1) $f(X) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$

   (2) $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$

   (3) $f(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\},\quad f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \in \{2, 3, 4\}\} = \{1, 2\}$

7. 写像 $f : X \to Y$ に対して f^{-1} は次の意味で用いられる。

   (1) **写像の逆像**
   $y \in Y$ に対して
   $$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$
   である。また $B \subset Y$ に対して
   $$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$$
   である。$f^{-1}(y),\ f^{-1}(B)$ ともに X の部分集合である。

   (2) **逆写像**
   f が全単射のときに限り、f^{-1} で f の逆写像を表す。すなわち $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が唯一つ存在し、$f^{-1}(y) = x$ である。$f^{-1}(y)$ は X の元である。

   f が全単射であっても (1) の意味で用いることもできる。このとき $f^{-1}(y)$ は (1) の意味ならば X の (唯一つの要素をもつ) 部分集合、(2) の意味ならば X の一つの元である。この記号だけではどちらであるかの判別は不可能であり、説明がない場合には前後の文脈から理解することとなる。$B \subset Y$ に対する $f^{-1}(B)$ はどちらで理解しても同じものになる。

8. (1) $f : X \to Y$ を写像とする。

   - f が単射であることの定義
     X の元 $x,\ y$ に対して、$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ が成り立つとき f は単射であるという。(任意の X の元 $x,\ y$ に対して、$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ が成り立つときとしてもよい。)
   - f が全射であることの定義
     $f(X) = Y$ が成り立つとき f が全射であるという。(任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在するときとしてもよい。)

   (2) $\Rightarrow$) $f(X) = Y$ であるから $f(X) \supset Y$ である。すなわち、任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在する。

   $\Leftarrow$) 写像の定義から $f(X) \subset Y$ で、仮定より、$f(X) \supset Y$ である。よって $f(X) = Y$ である。

   (3) 問題 4 の写像が全射となっている。
   なぜなら、$\{0\} \cup \mathbb{N}$ の任意の元 x に対して $x = (x+1) - 1 = f(x+1)$ となって、$x + 1$ は $\mathbb{N}$ の元である。したがって f は全射である。

   (4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $x \mapsto 3x$ と定めると単射である。
   なぜなら、任意の $\mathbb{N}$ の元 x, y に対して、$f(x) = f(y)$ とすると、$3x = 3y$ だから、$x = y$ となる。よって f は単射である。

   ここで、書いたものは例であり、問題の条件を満たす写像は多数存在する。

9. (1) $f(x)=f(y)$ とする。このとき $x+1=y+1$ なので $x=y$ である。
   (2) $r\in\mathbb{R}$ とする。$r/2\in\mathbb{R}$ であり $f(r/2)=r$ である。
   (3) $f(x)=f(y)$ とする。$2x=2y$ なので $x=y$ であり、よって f は単射である。$1\in\mathbb{Z}$ に対して $1=f(x)=2x$ となる $x\in\mathbb{Z}$ は存在しないので f は全射ではない。

10. (1) 写像 f が全単射であるとは、f が全射かつ単射であることである。(任意の $y\in Y$ に対して $f(x)=y$ となる $x\in X$ がただひとつ定まるとしてもよい。)
   (2) $f(x)=\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ と定めると全単射である。(点 $(a,\ c)$ を通る傾き $\dfrac{d-c}{b-a}$ の直線である。)
   (3) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ を

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{if } x>0\\ 1 & \text{if } x=0\\ -2x+1 & \text{if } x<0\end{cases}$$

   で定めるとこれは全単射である。

11. (1) $f(n)=n+1\quad(n\in\mathbb{N})$
   (2) $\begin{cases}f(1)=1\\ f(n)=n-1\quad(n\in\mathbb{N},n\geq 2)\end{cases}$
   (3) $f(x)=e^x\quad(x\in\mathbb{R})$
   (4) $f(x)=x^3-x\quad(x\in\mathbb{R})$

   条件を満たす写像は他にもたくさんある。

12. (1) $\subset$) $x\in f(f^{-1}(B))$ とする。ある $y\in f^{-1}(B)$ が存在して、$x=f(y)$ となる。ここで、$y\in f^{-1}(B)$ より、$f(y)\in B$ となって（逆像の定義）$x=f(y)\in B$ である。
   $\supset$) $x\in B$ とする。f は全射なので、ある $y\in X$ が存在して、$f(y)=x$ となる。ここで $f(y)=x\in B$ なので $y\in f^{-1}(B)$ である。したがって $x=f(y)\in f(f^{-1}(B))$ である。
   以上から、$f(f^{-1}(B))=B$ となる。
   (2) $X=Y=\mathbb{Z}$ とし $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を定値写像 $f(a)=0\ (\forall a\in\mathbb{Z})$ とする。このとき $B=\{1\}$ とすれば $f^{-1}(B)=\phi$ であり $f(f^{-1}(B))=\phi\neq B$ である。
   (3) $\subset$) $x\in f^{-1}(f(A))$ とする。$f(x)\in f(A)$ となって、像の定義より、ある $y\in A$ が存在して $f(x)=f(y)$ となる。f は単射なので $x=y\in A$ である。
   $\supset$) $x\in A$ とする。$f(x)\in f(A)$ で、逆像の定義より、$x\in f^{-1}(f(A))$ である。
   以上から、$f^{-1}(f(A))=A$ となる。
   (4) $X=Y=\mathbb{Z}$ とし $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を定値写像 $f(a)=0\ (\forall a\in\mathbb{Z})$ とする。このとき $A=\{1\}$ とすれば $f(A)=\{0\}$ であり $f^{-1}(f(A))=\mathbb{Z}\neq A$ である。

13. (1) $\supset$) $b\in f(X)\cup f(Y)$ とする。このとき $b\in f(X)$ または $b\in f(Y)$ である。$b\in f(X)$ とすると、ある $x\in X$ があって $b=f(x)$ である。このとき $x\in X\subset X\cup Y$ なので $b=f(x)\in f(X\cup Y)$ である。$b\in f(Y)$ のときもまったく同様にして $b\in f(X\cup Y)$ となる。よって $f(X\cup Y)\supset f(X)\cup f(Y)$ である。
   $\subset$) $x\in f(X\cup Y)$ とする。このとき、ある $a\in X\cup Y$ が存在して $f(a)=x$ である。$a\in X$ ならば $x=f(a)\in f(X)$ であり、$a\in Y$ ならば $x=f(a)\in f(Y)$ なので $x\in f(X)\cup f(Y)$ である。よって $f(X\cup Y)\subset f(X)\cup f(Y)$ である。
   以上から、$f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y)$ となる。
   (2)
   - $b\in f(X\cap Y)$ とする。ある $x\in X\cap Y$ があって $b=f(x)$ である。$x\in X$ より $b=f(x)\in f(X)$ であり、$x\in Y$ より $b=f(x)\in f(Y)$ である。よって $b\in f(X)\cap f(Y)$ となり $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$ が成り立つ。
   - $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$ は成り立たない。
     (反例) $f:\{0,\ 1\}\to\{a\}$ を $f(0)=f(1)=a$ と定め、$X=\{0\},\ Y=\{1\}$ とすると、$f(X)=\{a\}$, $f(Y)=\{a\}$ である。よって $f(X\cap Y)=f(\phi)=\phi\neq\{a\}=f(X)\cap f(Y)$ であるから等号は成立しない。

14. $f^{-1}(b)\cap f^{-1}(b')\neq\phi$ と仮定し $a\in f^{-1}(b)\cap f^{-1}(b')$ とする。定義により $b=f(a)=b'$ であるが、$b\neq b'$ の仮定に反する。よって $f^{-1}(b)\cap f^{-1}(b')=\phi$ である。

15. $x,\ y\in X$ に対して $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$ とする。このとき $g(f(x))=g(f(y))$ となって、g が単射なので、$f(x)=f(y)$。さらに、f も単射だから $x=y$。すなわち、$g\circ f$ は単射である。

16. $x \in Z$ とする。g が全射だから適当な $y \in Y$ が存在して、$x = g(y)$ となる。また f も全射だから、適当な $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる。このとき $x = g(y) = g(f(z)) = (g \circ f)(z)$。であるから $g \circ f$ は全射である。

17. $\Rightarrow$) $x,\ y \in X$ に対して、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ とする。このとき $g(f(x)) = g(f(y))$ となり、$g,\ f$ ともに単射であるから、$x = y$ となる。。すなわち $g \circ f$ は単射である。

   $\Leftarrow$) $x,\ y \in Y$ に対して、$g(x) = g(y)$ とする。f は全単射だから、$x = f(a), y = f(b)$ となる $a, b \in X$ 存在する。このとき、$g(f(a)) = g(x) = g(y) = g(f(b))$ となる。$g \circ f$ は単射なので、$a = b$ である。よって $x = f(a) = f(b) = y$ である。以上より g は単射である。

18.
   - 元をとって考える
   - 像で考える

   の二つの方法で解いてみることにする。

   [解答 1] $z \in Z$ とする。$g \circ f$ は全射だから、$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ となる $x \in X$ が存在する。$f(x) \in Y$ なので g は全射である。

   [解答 2] $g \circ f$ は全射なので $Z = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y) \subset Z$ である。よって $Z = g(Y)$ となり g は全射である。

19. $f(x) = f(x')$ とする。このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ である。$g \circ f$ は単射なので $x = x'$ となる。

20. f が全単射とすれば、f は逆写像 f^{-1} をもつ。$g = f^{-1}$ とすれば、これは $g \circ f = id_X,\ f \circ g = id_Y$ を満たす。

   $g : Y \longrightarrow X$ を $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすものとする。恒等写像は全単射なので $f \circ g = id_Y$ と問題 18 より f は全射である。また $g \circ f = id_X$ と問題 19 より f は単射である。よって f は全単射である。

21. (1) $x,\ y \in \mathrm{Map}(A,\ B)$ に対して、$f_*(x) = f_*(y)$ であるとする。任意の $a \in A$ に対して、$(f_*(x))(a) = (f_*(y))(a)$、すなわち $f(x(a)) = f(y(a))$ である。ここで、f は単射なので、$x(a) = y(a)$ となる。$a \in A$ は任意なので $x = y$ となる。したがって f_* は単射である。

   (2) $x \in \mathrm{Map}(A,\ C)$ とする。$f : B \to C$ は全射なので、各 $a \in A$ に対して $x(a) = f(b_a)$ なる $b_a \in B$ が存在する。このとき $y : A \to B$ を $y(a) = b_a$ で定めれば (実はここで選択公理が必要である)、$f_*(y)(a) = f(y(a)) = f(b_a) = x(a)$ となり $f_*(y) = x$ である。よって f_* は全射である。

22. (1) $x \in f(A)$ とする。このとき、ある $y \in A$ が存在して、$x = f(y)$ となる。ここで $A \subset B$ だから、$y \in B$ となって、$x \in f(B)$ である。したがって $f(A) \subset f(B)$ である。

   (2) $x \in f(A) - f(B)$ とする。このとき $x \in f(A)$ かつ $x \notin f(B)$ である。よって、ある $a \in A$ が存在して $x = f(a)$ となる。$a \in B$ とすると $x = f(a) \in f(B)$ となり矛盾が生じるので $a \notin B$ である。したがって $a \in A - B$ となり $x \in f(A - B)$ である。よって $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$ が成り立つ。

   (3) $x \in f^{-1}(C)$ とする。このとき $f(x) \in C$ である。$C \subset D$ なので、$f(x) \in D$ である。よって $x \in f^{-1}(D)$ となる。したがって $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ となる。

   (4) $\subset$) $x \in f^{-1}(Y - D)$ とする。$f(x) \in Y - D$ となるので、$f(x) \in Y$ かつ $f(x) \notin D$ である。したがって、$x \in f^{-1}(Y) = X, x \notin f^{-1}(D)$ となって、$x \in X - f^{-1}(D)$ である。$f^{-1}(Y - D) \subset X - f^{-1}(D)$ が成り立つ。

   $\supset$) $x \in X - f^{-1}(D)$ とする。$x \in X$ かつ $x \notin f^{-1}(D)$ である。よって、$f(x) \in f(X) \subset Y,\ f(x) \notin D$ であり $f(x) \in Y - D$ となる。したがって $x \in f^{-1}(Y - D)$ となる。よって $f^{-1}(Y - D) \supset X - f^{-1}(D)$ である。

   以上から $f^{-1}(Y - D) = X - f^{-1}(D)$ が成り立つ。

   (5) $\subset$) $x \in f^{-1}(C \cap D)$ とする。$f(x) \in C \cap D$ となるので、$f(x) \in C$ かつ $f(x) \in D$ である。したがって、$x \in f^{-1}(C)$ かつ $x \in f^{-1}(D)$ となり、$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ である。よって $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ である。

   $\supset$) $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ とする。$x \in f^{-1}(C)$ かつ $x \in f^{-1}(D)$ である。よって $f(x) \in C$ かつ $f(x) \in D$ である。すなわち $f(x) \in C \cap D$ であり、$x \in f^{-1}(C \cap D)$ となる。したがって $f^{-1}(C \cap D) \supset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ となる。

   以上から、$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ が成り立つ。

   (6) $\subset$) $x \in f(f^{-1}(C))$ とする。ある $y \in f^{-1}(C)$ が存在して $x = f(y)$ となる。ここで、$f(y) \in C$ だから、$x = f(y) \in C$ である。また $y \in f^{-1}(C) \subset X$ だから、$f(y) \in f(X)$ である。よって $x \in C \cap f(X)$ となる。$f(f^{-1}(C)) \subset C \cap f(X)$ が成り立つ。

   $\supset$) $x \in C \cap f(X)$ とする。$x \in C$ かつ $x \in f(X)$ である。ある $y \in X$ が存在して $x = f(y)$ となる。$f(y) = x \in C$ だから、$y \in f^{-1}(C)$ である。したがって $x = f(y) \in f(f^{-1}(C))$ となる。よって $f(f^{-1}(C)) \supset C \cap f(X)$ である。

   以上から、$f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$ が成り立つ。

23. $f^{-1}(a) = X$, $f^{-1}(x) = \phi \ (x \neq a)$

このように集合 X の任意の元を集合 Y の唯一つの元 a へうつす写像を a への**定値写像**という。

24. $f : X \to Y$ を全単射とする。このとき、$\tilde{f} : 2^X \to 2^Y$ を、$A \in 2^X$ に対して $\tilde{f}(A) = f(A)$ で定めると、これが全単射であることを示す。

$g : Y \to X$ を f の逆写像とし $\tilde{f}$ と同様に写像 $\tilde{g} : 2^Y \to 2^X$ を定義する。このとき $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{2^X}$ と $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{2^Y}$ を示せば、問題 20 より $\tilde{f}$ は全単射である。

$A \in 2^X$ とするとき問題 22 (6) より $g(g^{-1}(A)) = A \cap g(2^Y)$ であるが、g は全射なので $g(2^Y) = 2^X$ であり、よって $g(g^{-1}(A)) = A$ である。これは $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{2^X}$ を意味する。

同様に $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{2^Y}$ も成り立ち $\tilde{f}$ は全単射である。

25. 問題 18, 19 より、f は全単射である。また $g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h$ である。

26. まず $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)f_B(x)$ を示す。$x \in A \cap B$ のとき $f_A(x) = 1 = f_B(x)$ なので $f_A(x)f_B(x) = 1$ である。それ以外の場合には $f_A(x) = 0$ または $f_B(x) = 0$ なので $f_A(x)f_B(x) = 0$ である。よって $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)f_B(x)$ である。

$f_{A\cup B}(x) = f_A(x)+f_B(x)-f_{A\cap B}(x)$ を示す。(1) $x \in A\cap B$, (2) $x \in A\cap B^c$, (3) $x \in A^c\cap B$, (4) $x \in A^c\cap B^c$ の四つの場合に分けて考える。(1) のとき (右辺) $= 1+1-1 = 1 =$ (左辺) である。(2) のとき (右辺) $= 1+0-0 = 1 =$ (左辺) である。(3) のとき (右辺) $= 0+1-0 = 1 =$ (左辺) である。(4) のとき (右辺) $= 0+0-0 = 0 =$ (左辺) である。よっていずれの場合も $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$ が成り立つ。

27. (1) $\{a, b\}$
 (2) $\{a, b\}$
 (3) $\{a\}$
 (4) $\{1, 4\}$
 (5) ϕ (空集合)
 (6) $\{1, 4\}$

28. (1) $f([0, 1]) = [0, 1]$
 (2) $f([-1, 1]) = [0, 1]$
 (3) $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$
 (4) $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$
 (5) $f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$
 (6) $f(f^{-1}([0, 1])) = f([-1, 1]) = [0, 1]$
 (7) $f(f^{-1}([-1, 1])) = f([-1, 1]) = [0, 1]$
 (8) $f([-1, 2]) = [0, 4]$
 (9) $f([-1, 0]) = [0, 1]$
 (10) $f([-1, 2] - [-1, 0]) = f((0, 2]) = (0, 4]$
 (11) $f([-1, 2]) - f([-1, 0]) = [0, 4] - [0, 1] = (1, 4]$

29. (1) $\mathbb{R}$
 (2) $\{-1, 0, 1\}$
 (3) $\{2\}$

30. $\Longrightarrow$) $x \in A$ ならば、$f(A)$ の定義より $f(x) \in f(A)$ である。

$\Longleftarrow$) $f(x) \in f(A)$ とする。ある $a \in A$ があって $f(x) = f(a)$ となる。このとき f が単射であることから $x = a$ となり $x \in A$ である。

31. (1) $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1\}$ とし、$f : A \to B$ を $f(1) = 1$, $g : B \to C$ を $g(1) = g(2) = 1$ で定める。このとき g は単射ではない。また $g \circ f : A \to C$ は $f(1) = 1$ で定まるものであり、単射である。
 (2) (1) と同じ A, B, C, f, g が条件を満たしている。すなわち f は全射でなく、$g \circ f$ は全射である。

32. (1) $y \in Y$ とする。$g(y) \in Z$ に対して、$g \circ f$ が全射なので、ある $x \in X$ があって $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$ である。g が単射なので $y = f(x)$ となる。よって f は全射である。
 (2) $y, y' \in Y$ について $g(y) = g(y')$ とする。f は全射なので、ある $x, x' \in X$ が存在して $y = f(x)$, $y' = f(x')$ となる。このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x')$ である。$g \circ f$ は単射なので $x = x'$ となる。よって $y = f(x) = f(x') = y'$ となり g は単射である。

問 18、問 19 を用いれば (1) の g, (2) の f は全単射である。これを用いて証明してもよい。

33. (1) $f(0) = f(0-0) = f(0) - f(0) = 0$ である。

 (2) $f(-a) = f(0-a) = f(0) - f(a) = -f(a)$ である。

 (3) f は単射であるとする。(1) より $0 \in f^{-1}(0)$ であるから $\{0\} \subset f^{-1}(0)$ である。$a \in \mathbb{R}$ を $f(a) = 0$ をみたすものとすると $f(a) = 0 = f(0)$ で、f が単射であることにより $a = 0$ である。よって $f^{-1}(0) = \{0\}$ である。

 $f^{-1}(0) = \{0\}$ とする。$a, b \in \mathbb{R}$ について $f(a) = f(b)$ とする。このとき $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0$ である。したがって $a - b \in f^{-1}(0) = \{0\}$ となり $a - b = 0$、すなわち $a = b$ である。よって f は単射である。

34. (1) $\Rightarrow$ (2).
条件を満たす $h : C \to B$ が存在したとする。また $g(a) = g(a')$ とする。このとき $f(a) = h \circ g(a) = h(g(a)) = h(g(a')) = h \circ g(a') = f(a')$ である。

 (2) $\Rightarrow$ (1).
「$g(a) = g(a')$ ならば $f(a) = f(a')$」が成り立つと仮定し、$f = h \circ g$ となる $h : C \to B$ を構成する。$b_0 \in B$ を一つ選ぶ。

- $c \in C - g(A)$ に対しては $h(c) = b_0$ とする。
- $c \in g(A)$ とする。ある $a \in A$ があって $g(a) = c$ である。このとき $h(c) = f(a)$ として、写像が矛盾なく定義できることを示す。これを示すには $g(a) = c = g(a')$ なる $a, a' \in A$ に対して $f(a) = f(a')$ となることをいえばよいが、これは仮定から成り立っている。

 上のように定義した h に対して $f = h \circ g$ であることを示す。$a \in A$ とする。このとき h の定義により $h \circ g(a) = h(g(a)) = f(a)$ である。よって $f = h \circ g$ が成り立つ。

35. (1) $(f \times g)(a, c) = (f \times g)(a', c')$ とする。このとき $(f(a), g(c)) = (f(a'), g(c'))$ であるから $f(a) = f(a'), g(c) = g(c')$ である。f, g は共に単射なので $a = a'$, $c = c'$ となる。よって $(a, c) = (a', c')$ となる。よって $f \times g$ は単射である。

 (2) $(b, d) \in B \times D$ とする。$b \in B$, $d \in D$ である。f は全射なので、ある $a \in A$ があって $f(a) = b$ である。また g は全射なので、ある $c \in C$ があって $g(c) = d$ である。このとき $(a, c) \in A \times C$ であって $(f \times g)(a, c) = (f(a), g(c)) = (b, d)$ となるので $f \times g$ は全射である。

36. $f : X \to Y$ を単射とする。このとき $g : X \to f(X)$ $(g(x) = f(x))$ が存在して、これは全単射である。$h : Y \to X$ を以下のように定義する。$x_0 \in X$ を任意にとり、固定する。そして

$$h(y) = \begin{cases} g^{-1}(y), & y \in f(x) \text{ のとき} \\ x_0, & y \notin f(x) \text{ のとき} \end{cases}$$

 とする。このとき $h(Y) \supset h(f(X)) = g^{-1}(f(X)) = g^{-1}(g(X)) = X$ であるから h は全射である。