集合論問題集

2 集合

1. $A, B$ を集合とする。
   (1) $x \in A \cap B$ であることを定義を書け。
   (2) $x \in A \cup B$ であることを定義を書け。
   (3) $A \subseteq B$ であることを定義を書け。
   (4) $A = B$ であることを定義を書け。
   (5) $A - B$ の定義を書け。

2. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ であるとき、$A \cap B, A \cup B$ をそれぞれ求めよ。

3. $A$ を 4 の倍数全体の集合、$B$ を 6 の倍数全体の集合とする。このとき $A \cap B$ を決定せよ。

4. $A \subseteq C$ かつ $B \subseteq C$ であるならば、$A \cup B \subseteq C$ であることを示せ。

5. $A$ を集合とする。$A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A$ を示せ。

6. 集合族 $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える。ただし $A_{\lambda}$ は集合 $M$ の部分集合とし、補集合は $M$ で考えることにする。
   (1) $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$ の定義を書け。
   (2) $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda})^{c} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}^{c}$ (De Morgan の法則) を証明せよ。

7. $A \subseteq B$ とする。補集合は $B$ で考えることにして以下を証明せよ。
   (1) $(A^{c})^{c} = A$
   (2) $A \cup B = B$
   (3) $A \cup A^{c} = B$
   (4) $A^{c} \cap A = \phi$
   (5) $\phi^{c} = B$

8. $(A \cup B)^{c} = A^{c} \cap B^{c}$ を示せ。ただし $A, B$ は集合 $M$ の部分集合とし、補集合は $M$ で考えることにする。

9. $(A \cap B)^{c} = A^{c} \cup B^{c}$ を示せ。ただし $A, B$ は集合 $M$ の部分集合とし、補集合は $M$ で考えることにする。

10. $A \cap B \subseteq C$ ならば $B \subseteq A^{c} \cup C$ であることを証明せよ。ただし $A, B, C$ は集合 $M$ の部分集合とし、補集合は $M$ で考えることにする。

11. $A \cap C = B \cap C$ かつ $A \cup C = B \cup C$ であるならば、$A = B$ であることを証明せよ。

12. 集合 $X$ の部分集合 $A, B$ について $A \cap B = \phi$ であることと $A \subseteq X - B$ であることは同値であることを示せ。

13. 直積集合 $A \times B$ とは何か。その定義を書け。

14. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$ であるとき $A \times B$ の元をすべて書け。ただし $a \neq b$ とする。

15. $A = \{a, b, c\}$ という集合のべき集合 $2^{A}$ を具体的に書け。ただし $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ とする。

16. 自然数 $n$ に対して $A_{n} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ とおく。
   (1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n}$ を求め、それが正しいことを証明せよ。
   (2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n}$ を求め、それが正しいことを証明せよ。

17. $A \subseteq \mathbb{N}$ とする。$A$ が無限集合であることを論理記号を使って特徴付けよ。

18. 自然数 $\mathbb{N}$ で添字付けられた集合の族 $\{A_{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して
   $$B_{m} = \bigcup_{j=m}^{\infty} A_{j}, \quad C_{m} = \bigcap_{j=m}^{\infty} A_{j}$$
   とおく。このとき次を示せ。
   (1) $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m}$ は無数に多くの $A_{n}$ に含まれる元の全体である。
   (2) $\bigcup_{m=1}^{\infty} C_{m}$ はある番号以上のすべての $A_{n}$ に含まれる元の全体である。
   (3) $m > n$ ならば $A_{m} \subseteq A_{n}$ であるとする。このとき $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{m}$ であることを示せ。
集合論問題集・解答例と解説

2 集合

1. (1) \( x \in A \cap B \iff \{ x \in A \text{かつ} x \in B \} \)
   (2) \( x \in A \cup B \iff \{ x \in A \text{または} x \in B \} \)
   (3) \( A \subset B \iff \{ x \in A \text{ならば} x \in B \} \)
   (4) \( A = B \iff \{ x \in B \text{かつ} A \supset B \} \)
   (5) \( \{ a \mid a \in A \text{かつ} a \notin B \} \)

定義はきちんと覚えること。定義を知らないとなのにもできない。\( A - B \) は \( A \setminus B \) と書かれることも多い。

2. \( A \cap B = \{ 2, 3, 7 \} \), \( A \cup B = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 \} \).

3. \( A \cap B \) は 12 の倍数全体の集合。

4. \( x \in A \cup B \) とする。このとき、\( x \in A \) または \( x \in B \) である。\( x \in A \) のとき \( A \subset C \) より \( x \in C \) であり、\( x \in B \) のとき \( B \subset C \) より \( x \in C \) である。よって、いずれの場合も \( x \in C \) である。以上より \( A \subset C \) かつ \( B \subset C \) ならば \( A \cup B \subset C \) が成り立つ。

5. \( A \cap \phi = \phi \) の証明
   \( \cap \) \( \{ x \in A \iff x \in A \cap \phi \} \) は、\( x \in \phi \) が偽なので、真である。よって \( A \cap \phi \supset \phi \) である。
   \( \cap \) 命題 \( \{ x \in A \cap \phi \} \) は \( \{ x \in A \text{かつ} x \in \phi \} \) と同値で、\( x \in \phi \) が偽なので、偽である。よって命題 \( \{ x \in A \cap \phi \} \) は真となり \( A \cap \phi \subset \phi \) である。
   よって \( A \cap \phi = \phi \) である。

\( A \cup \phi = A \) の証明
   \( \cup \) \( x \in A \) とする。このとき \( \{ x \in A \text{または} x \in \phi \} \) は真となり \( x \in A \cup \phi \) である。よって \( A \cup \phi \supset A \) である。
   \( \cup \) \( x \in A \cup \phi \) とする。\( x \in A \) または \( x \in \phi \) である。\( x \in \phi \) が偽であるから \( x \in A \) となる。よって \( A \cup \phi \subset A \) である。
   以上より \( A \cup \phi = A \) である。

6. (1) \( \lambda \in \Lambda \) が存在して \( x \in A_{\lambda} \) である。
   (2) \( \cap \) \( x \in ( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} )^{c} \) とする。\( 1 \) の否定に注意すれば「任意の \( \lambda \in \Lambda \) に対して \( x \notin A_{\lambda} \)」である。したがって「任意の \( \lambda \in \Lambda \) に対して \( x \notin A_{\lambda}^{c} \)」となり \( x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}^{c} \) である。よって \( ( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} )^{c} \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}^{c} \) となる。
   \( \cup \) \( x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}^{c} \) とする。「任意の \( \lambda \in \Lambda \) に対して \( x \notin A_{\lambda}^{c} \)」すなわち「任意の \( \lambda \in \Lambda \) に対して \( x \notin A_{\lambda} \)」である。この否定は「\( \lambda \in \Lambda \) が存在して \( x \in A_{\lambda} \)」であるから、\( x \in ( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} )^{c} \) となる。これにより \( ( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} )^{c} \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}^{c} \) となる。
   よって \( ( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} )^{c} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}^{c} \) となる。

7. (1) \( \cap \) \( a \in A \) とする。このとき \( a \notin A_{c} \) なので \( a \in ( A_{c} )^{c} \) である。よって \( ( A_{c} )^{c} \subset A \) となる。
   \( \cup \) \( a \in B \) で \( a \in ( A_{c} )^{c} \) とする。\( a \notin ( A_{c} )^{c} = B - A \) である。これは \( a \notin B \) または \( a \in A \) ということである。
   しかし \( a \in B \) なので \( a \in A \) となる。したがって \( ( A_{c} )^{c} \subset A \) である。
   以上を併せて \( A = ( A_{c} )^{c} \) である。
   (2) \( \cup \) \( x \in A \cup B \) とする。\( x \in A \) または \( x \in B \) である。仮定 \( A \subset B \) だから \( x \in A \) ならば \( x \in B \) である。したがって \( x \in B \) である。\( A \cup B \subset B \) が成り立つ。
   一般に \( A \cup B \supset B \) は成り立つので \( A \cup B = B \) である。
   (3) \( \cap \) \( x \in A \cup A_{c} \) とする。\( x \in A \) または \( x \in A_{c} \) である。\( B \) が全体集合なので \( A \subset B, A_{c} \subset B \) である。したがって \( x \in B \) である。\( A \cup A_{c} \subset B \) となる。
   \( \cap \) \( x \in B \) とする。\( x \in A \) または \( x \notin A \) なので \( x \in A \cup A_{c} \) である。\( A \cup A_{c} \supset B \) となる。
   以上より \( A \cup A_{c} = B \) が成り立つ。
   (4) \( x \in B \) を任意にとる。\( x \in A^{c} \cap A \) 仮定する。このとき \( \{ x \in A \text{かつ} x \in A^{c} \} \) であり、これは \( \{ x \in A \text{かつ} x \notin A \} \) と同値である。一般に命題 \( P \) に対して \( P \land ( \neg P ) \) は偽であるから、\( \{ x \in A \text{かつ} x \notin A \} \) は偽である。
   よって \( x \notin A^{c} \cap A \) である。したがって \( A^{c} \cap A = \phi \) である。
   (5) \( x \in B^{c} \) とする。\( x \notin B \) である。全体集合を \( B \) としているので \( x \in B \) である。これは矛盾である。したがって \( B^{c} = \phi \) である。両辺の補集合をとると \( B = ( B^{c} )^{c} = \phi^{c} \) である。
8. \( \subset \) \( x \in (A \cup B)^c \) とする。\( x \not\in A \cup B \) である。したがって、\( x \not\in A \) かつ \( x \not\in B \) となり、\( x \in A^c \cap B^c \) である。
\( \supset \) \( x \in A^c \cap B^c \) とする。\( x \in A^c \) かつ \( x \in B^c \) である。すなわち \( x \not\in A \) かつ \( x \not\in B \) だから \( x \not\in A \cup B \) となる。したがって、\( x \in (A \cup B)^c \) である。

以上より \( (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \) である。

9. 問 8 より、\( (A \cup B)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B \) であるから、両辺の補集合をとって \( (A \cap B)^c = ((A^c)^c)^c \cap ((B^c)^c)^c = A^c \cup B^c \) である。

10. \( x \in B \) とする。問 7 (3) より \( x \in A \) かつ \( x \not\in A^c \) である。\( x \in A \) のとき \( x \in A \cap B \) であり、仮定 \( A \cap B \subset C \) より \( x \in C \) となる。したがって \( x \in A^c \) または \( x \in C \) である。したがって \( B \subset A^c \cup C \) である。

11. \( a \in A \) とし \( a \in B \) となることを示す。\( a \in A \cap C = B \cup C \) なので \( a \in B \) または \( a \in C \) である。\( a \in C \) とすれば \( a \in A \cap C = B \cap C \) であるから \( a \in B \) である。よっていずれの場合も \( a \in B \) となり \( A \subset B \) である。

同様に \( B \subset A \) も示され \( A = B \) となる。

12. \( A \cap B = \emptyset \) と仮定する。\( x \in A \) とする。条件より \( A \cap B = \emptyset \) だから \( x \not\in B \)、すなわち \( x \not\in X - B \) よって \( A \subset X - B \) である。

\( A \subset X - B \) とする。\( A \cap B \subset \emptyset \) は空集合の定義から成立つので \( A \cap B \subset \emptyset \)、すなわち \( A \cap B = \emptyset \) を示す。\( x \in A \cap B \) すると \( x \in A \subset X - B \) なので \( x \not\in B \) となり、これは矛盾である。よって \( A \cap B = \emptyset \) である。

13. \( A \times B = \{ (x,y) | x \in A \ y \in B \} \)

14. \( (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c) \)

15. \( 2^{A} = \{ \phi, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ c, a \}, A \} \)

\( A \) には 3 個の元があるので \( 2^{3} \) で 8 個部分集合が存在します。

16. (1) \( \bigcap_{n \in N} A_{n} = N \)

\( \subset \) 任意の \( A_{n} \) は \( N \) の部分集合だから、\( \bigcap_{n \in N} A_{n} \subset N \) である。
\( \supset \) \( x \in N \) とする。\( x \leq x \) だから、\( x \in A_{x} \) である。したがって \( x \in \bigcap_{n \in N} A_{n} \) となる。よって \( \bigcap_{n \in N} A_{n} \supset N \) となる。

以上から \( \bigcap_{n \in N} A_{n} = N \) が成り立つ。

(2) \( \bigcap_{n \in N} A_{n} = \{ 1 \} \)

\( \subset \) 任意の \( n \in N \) に対して、\( A_{n} \supset 1 \) より、\( \bigcap_{n \in N} A_{n} \supset 1 \) である。よって \( \bigcap_{n \in N} A_{n} \supset \{ 1 \} \) である。
\( \supset \) 次に \( \bigcap_{n \in N} A_{n} \subset \{ 1 \} \) を対偶によって示す。\( 1 \neq x \in N \) について \( x \not\in \bigcap_{n \in N} A_{n} \)、すなわち、ある \( n \in N \) に対して \( x \not\in A_{n} \) をいえばよい。\( x \geq 2 \) なので \( x \not\in \{ 1 \} = A_{1} \) である。よって \( x \not\in \{ 1 \} \) ならば \( x \not\in \bigcap_{n \in N} A_{n} \) である。

以上から、\( \bigcap_{n \in N} A_{n} = \{ 1 \} \) が成り立つ。

(対偶を使わない \( \bigcap_{n \in N} A_{n} \subset \{ 1 \} \) の証明)
\( a \in \bigcap_{n \in N} A_{n} \) とする。任意の \( n \in N \) に対して \( a \in A_{n} \) であるから、特に \( a \in A_{1} = \{ 1 \} \) である。よって \( a = 1 \) であり \( a \in \{ 1 \} \) である。したがって \( \bigcap_{n \in N} A_{n} \subset \{ 1 \} \) となる。

17. \( \forall a \in N, \exists b \in A, a \leq b \)

18. (1) \( B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m} \) とおく。

無数に多くの \( A_{n} \) に含まれる元の全体からなる集合を \( T \) とおく。\( a \not\in S \) ということは、「\( a \in A_{n} \) となる \( n \in N \) が有限個しかない」ということで、これは「ある \( N \in N \) が存在して \( n > N \) ならば \( a \not\in A_{n} \) ということである。論理記号で書けば「\( \exists N \in N(\forall n \in N(n > N \Rightarrow a \not\in A_{n})) \)」である。\( a \in A \) はその否定であるから、「\( \forall N \in N(\exists n \in N(n > N) \land (a \in A_{n})) \)」である。

\( B = S \) を示す。

\( \subset \) \( a \in B \) とする。\( N \in N \) を任意に取り固定する。\( B \) の定義より \( a \in B_{N+1} = \bigcup_{j=N+1}^{\infty} A_{j} \) である。よって、ある \( k > N + 1 > N \) があって \( a \in B_{k} \) である。上記の考察から \( a \in S \) となる。したがって \( B \subset S \) である。
\( \supset \) \( a \in S \) とする。\( m \in N \) を任意に取り固定する。このとき \( a \in B_{m} \) を示せばよい。\( a \in S \) であるから、上記の考察から、ある \( k > m \) があって \( a \in A_{k} \) である。このとき \( a \in A_{k} \subset \bigcup_{j=m}^{\infty} A_{j} = B_{m} \) である。よって \( a \in B \) である。したがって \( B \subset S \) である。

以上より \( B = S \) である。

(2) \( C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{m} \) とおく。ある番号以上のすべての \( A_{n} \) に含まれる元の全体からなる集合を \( T \) とおく。\( C = T \) を示す。
(3) $a \in C$ とする。このとき、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $a \in C_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ である。したがって、$\ell \geq k$ なる任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $a \in A_\ell$ であり、よって $a \in T$ である。したがって $C \subseteq T$ である。

(2) $a \in T$ とする。$T$ の定義より、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $\ell \geq k$ ならば $a \in A_\ell$ である。したがって

$$a \in \bigcap_{\ell=k}^{\infty} A_\ell = C_k \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m = C$$

である。よって $C \supseteq T$ である。

以上より $C = T$ である。

(3) $B, C$ は (1), (2) で定めたものとする。$B = C$ を示す。

(1) $b \in B$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を取って固定する。$B$ の定義により $b \in B_m = \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j$ である。よって、ある $k \geq m$ があって $b \in A_k$ となるが、仮定より $A_k \subseteq A_m$ なので $b \in A_m$ である。したがって、任意の $m \in \mathbb{N}$ について $b \in A_m$ となる。よって $b \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = C_1 \subseteq C$ である。したがって $B \subseteq C$ である。

(2) $c \in C$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を任意に取り固定する。$C$ の定義により、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $c \in C_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ である。よって $\ell \geq k$ なる任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $c \in A_\ell$ である。$n = \max \{m, k\}$ とおく。$n \geq k$ より $c \in A_n$ である。また $n \geq m$ と仮定により $A_n \subseteq A_m$ である。更に $A_m \subseteq B_m$ である。よって $c \in B_m$ となる。$m \in \mathbb{N}$ は任意に取って固定したものだったから $c \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = B$ である。$B \supseteq C$ が成り立つ。

以上より $B = C$ である。