集合論問題集

2　集合

1. A, B を集合とする。
   (1) $x \in A \cap B$ であることの定義を書け。
   (2) $x \in A \cup B$ であることの定義を書け。
   (3) $A \subset B$ であることの定義を書け。
   (4) $A = B$ であることの定義を書け。
   (5) $A - B$ の定義を書け。
2. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ であるとき、$A \cap B$, $A \cup B$ をそれぞれ求めよ。
3. A を 4 の倍数全体の集合、B を 6 の倍数全体の集合とする。このとき $A \cap B$ を決定せよ。
4. $A \subset C$ かつ $B \subset C$ であるならば、$A \cup B \subset C$ であることを示せ。
5. A を集合とする。$A \cap \phi = \phi$、$A \cup \phi = A$ を示せ。
6. 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える。ただし A_λ は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
   (1) $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の定義を書け。
   (2) $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ (De Morgan の法則) を証明せよ。
7. $A \subset B$ とする。補集合は B で考えることにして以下を証明せよ。
   (1) $(A^c)^c = A$
   (2) $A \cup B = B$
   (3) $A \cup A^c = B$
   (4) $A^c \cap A = \phi$
   (5) $\phi^c = B$
8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ。ただし A, B は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
9. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示せ。ただし A, B は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
10. $A \cap B \subset C$ ならば $B \subset A^c \cup C$ であることを証明せよ。ただし A, B, C は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
11. $A \cap C = B \cap C$ かつ $A \cup C = B \cup C$ であるならば、 $A = B$ であることを証明せよ。
12. 集合 X の部分集合 $A,\ B$ について $A \cap B = \phi$ であることと $A \subset X - B$ であることは同値であることを示せ。
13. 直積集合 $A \times B$ とは何か。その定義を書け。
14. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ であるとき $A \times B$ の元をすべて書け。ただし $a \neq b$ とする。
15. $A = \{a, b, c\}$ という集合のべき集合 2^A を具体的に書け。ただし $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ とする。
16. 自然数 n に対して $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ とおく。
   (1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それが正しいことを証明せよ。
   (2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それが正しいことを証明せよ。
17. $A \subset \mathbb{N}$ とする。A が無限集合であることを論理記号を使って特徴付けよ。
18. 自然数 $\mathbb{N}$ で添字付けられた集合の族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して
$$B_m = \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j, \quad C_m = \bigcap_{j=m}^{\infty} A_j$$
   とおく。このとき次を示せ。
   (1) $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ は無数に多くの A_n に含まれる元の全体である。
   (2) $\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ はある番号以上のすべての A_n に含まれる元の全体である。
   (3) $m > n$ ならば $A_m \subset A_n$ であるとする。このとき $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ であることを示せ。

2　集合

1. (1) $x \in A \cap B \iff$「$x \in A$ かつ $x \in B$」
   (2) $x \in A \cup B \iff$「$x \in A$ または $x \in B$」
   (3) $A \subset B \iff$「$x \in A$ ならば $x \in B$」
   (4) $A = B \iff$「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」
   (5) $\{a \mid a \in A$ かつ $a \notin B\}$

   定義はきちんと覚えること。定義を知らないとなにもできない。$A - B$ は $A \setminus B$ と書かれることも多い。

2. $A \cap B = \{2, 3, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3. $A \cap B$ は 12 の倍数全体の集合。

4. $x \in A \cup B$ とする。このとき、$x \in A$ または $x \in B$ である。$x \in A$ のとき $A \subset C$ より $x \in C$ であり、$x \in B$ のとき $B \subset C$ より $x \in C$ である。よって、いずれの場合も $x \in C$ である。以上より $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cup B \subset C$ が成り立つ。

5.
   - $A \cap \phi = \phi$ の証明
     $\supset$) 「$x \in \phi \Longrightarrow x \in A \cap \phi$」は、$x \in \phi$ が偽なので、真である。よって $A \cap \phi \supset \phi$ である。
     $\subset$) 命題「$x \in A \cap \phi$」は「$x \in A$ かつ $x \in \phi$」と同値で、$x \in \phi$ が偽なので、偽である。よって命題「$x \in A \cap \phi \Longrightarrow x \in \phi$」は真となり $A \cap \phi \subset \phi$ である。

     よって $A \cap \phi = \phi$ である。
   - $A \cup \phi = A$ の証明
     $\supset$) $x \in A$ とする。このとき「$x \in A$ または $x \in \phi$」は真となり $x \in A \cup \phi$ である。よって $A \cup \phi \supset A$ である。
     $\subset$) $x \in A \cup \phi$ とする。$x \in A$ または $x \in \phi$ である。$x \in \phi$ は偽であるから $x \in A$ となる。よって $A \cup \phi \subset A$ である。

     以上より $A \cup \phi = A$ である。

6. (1) ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x \in A_\lambda$ である。
   (2) $\subset$) $x \in (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$ とする。(1) の否定に注意すれば「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \notin A_\lambda$」である。したがって「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \in {A_\lambda}^c$」となり $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ である。よって $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ となる。
   $\supset$) $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ とする。「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \in {A_\lambda}^c$」、すなわち「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \notin A_\lambda$」である。この否定は「ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x \in A_\lambda$」であるから、$x \in (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$ となる。これにより $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ となる。
   よって $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ となる。

7. (1) $\supset$) $a \in A$ とする。このとき $a \notin A^c$ なので $a \in (A^c)^c$ である。よって $(A^c)^c \supset A$ となる。
   $\subset$) $a \in B$ で $a \in (A^c)^c$ とする。$a \notin (A^c) = B - A$ である。これは $a \notin B$ または $a \in A$ ということである。しかし $a \in B$ なので $a \in A$ となる。したがって $(A^c)^c \subset A$ である。
   以上を併せて $A = (A^c)^c$ である。
   (2) $\subset$) $x \in A \cup B$ とする。$x \in A$ または $x \in B$ である。仮定より $A \subset B$ だから $x \in A$ ならば $x \in B$ である。したがって、$x \in B$ である。$A \cup B \subset B$ が成り立つ。
   一般に $A \cup B \supset B$ は成り立つので $A \cup B = B$ である。
   (3) $\subset$) $x \in A \cup A^c$ とする。$x \in A$ または $x \in A^c$ である。B が全体集合なので $A \subset B$, $A^c \subset B$ である。したがって $x \in B$ である。$A \cup A^c \subset B$ となる。
   $\supset$) $x \in B$ とする。$x \in A$ または $x \notin A$ なので $x \in A \cup A^c$ である。$A \cup A^c \supset B$ となる。
   以上より $A \cup A^c = B$ が成り立つ。
   (4) $x \in B$ を任意にとる。$x \in A^c \cap A$ と仮定する。このとき「$x \in A$ かつ $x \in A^c$」であり、これは「$x \in A$ かつ $x \notin A$」と同値である。一般に命題 P に対して $P \wedge (\neg P)$ は偽であるから、「$x \in A$ かつ $x \notin A$」は偽である。よって、$x \notin A^c \cap A$ である。したがって $A^c \cap A = \phi$ である。
   (5) $x \in B^c$ とする。$x \notin B$ である。全体集合を B としているので $x \in B$ である。これは矛盾である。したがって $B^c = \phi$ である。両辺の補集合をとって $B = (B^c)^c = \phi^c$ である。

8. $\subset$) $x \in (A \cup B)^c$ とする。$x \notin A \cup B$ である。したがって、$x \notin A$ かつ $x \notin B$ となり、$x \in A^c \cap B^c$ である。

$\supset$) $x \in A^c \cap B^c$ とする。$x \in A^c$ かつ $x \in B^c$ である。すなわち $x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから $x \notin A \cup B$ となる。したがって、$x \in (A \cup B)^c$ である。

以上より $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ である。

9. 問 8 より、$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B$ であるから、両辺の補集合をとって $(A \cap B)^c = ((A^c \cup B^c)^c)^c = A^c \cup B^c$ である。

10. $x \in B$ とする。問 7 (3) より $x \in A$ または $x \in A^c$ である。$x \in A$ のとき $x \in A \cap B$ であり、仮定 $A \cap B \subset C$ より $x \in C$ となる。したがって $x \in A^c$ または $x \in C$ である。したがって $B \subset A^c \cup C$ である。

11. $a \in A$ とし $a \in B$ となることを示す。$a \in A \cup C = B \cup C$ なので $a \in B$ または $a \in C$ である。$a \in C$ とすれば $a \in A \cap C = B \cap C$ であるから $a \in B$ である。よっていずれの場合も $a \in B$ となり $A \subset B$ である。

同様に $B \subset A$ も示され $A = B$ となる。

12. $A \cap B = \phi$ と仮定する。$x \in A$ とする。条件より $A \cap B = \phi$ だから $x \notin B$、すなわち $x \in X - B$。よって $A \subset X - B$ である。

$A \subset X - B$ とする。$A \cap B \supset \phi$ は空集合の定義から成り立つので $A \cap B \subset \phi$、すなわち $A \cap B = \phi$ を示す。$x \in A \cap B$ とすると $x \in A \subset X - B$ なので $x \notin B$ となり、これは矛盾である。よって $A \cap B = \phi$ である。

13. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ \ y \in B\}$

14. $(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)$

15. $2^A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, A\}$

A には 3 個の元があるので 2^3 で 8 個部分集合が存在します。

16. (1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$

$\subset$) 任意の A_n は $\mathbb{N}$ の部分集合だから、$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{N}$ である。

$\supset$) $x \in \mathbb{N}$ とする。$x \le x$ だから、$x \in A_x$ である。したがって $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ となる。よって $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset \mathbb{N}$ となる。

以上から $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ が成り立つ。

(2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$

$\supset$) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n \ni 1$ より、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \ni 1$ である。よって $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset \{1\}$ である。

$\subset$) 次に $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ を対偶によって示す。$1 \neq x \in \mathbb{N}$ について $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$、すなわち、ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \notin A_n$ をいえばよい。$x \ge 2$ なので $x \notin \{1\} = A_1$ である。よって $x \neq 1$ ならば $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ である。

以上から、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$ が成り立つ。

(対偶を使わない $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ の証明)
$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \in A_n$ であるから、特に $a \in A_1 = \{1\}$ である。よって $a = 1$ であり $a \in \{1\}$ である。したがって $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ となる。

17. $\forall a \in \mathbb{N}, \ \exists b \in A, \ a \le b$

18. (1) $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ とおく。

無数に多くの A_n に含まれる元の全体からなる集合を S とおく。$a \notin S$ ということは、「$a \in A_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が有限個しかない」ということで、これは「ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ ならば $a \notin A_n$」ということである。論理記号で書けば「$\exists N \in \mathbb{N}(\forall n \in N(n > N \Rightarrow a \notin A_n))$」である。$a \in A$ はその否定であるから、「$\forall N \in \mathbb{N}(\exists n \in \mathbb{N}((n > N) \wedge (a \in A_n))$」である。

$B = S$ を示す。

$\subset$) $a \in B$ とする。$N \in \mathbb{N}$ を任意に取り固定する。B の定義より $a \in B_{N+1} = \bigcup_{j=N+1}^{\infty} A_j$ である。よって、ある $k \ge N + 1 > N$ があって $a \in B_k$ である。上記の考察から $a \in S$ となる。したがって $B \subset S$ である。

$\supset$) $a \in S$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を任意に取り固定する。このとき $a \in B_m$ を示せばよい。$a \in S$ であるから、上記の考察から、ある $k > m$ があって $a \in A_k$ である。このとき $a \in A_k \subset \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j = B_m$ である。よって $a \in B$ である。したがって $B \supset S$ である。

以上より $B = S$ である。

(2) $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ とおく。ある番号以上のすべての A_n に含まれる元の全体からなる集合を T とおく。$C = T$ を示す。

⊂) $a \in C$ とする。このとき、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $a \in C_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ である。したがって、$\ell \geq k$ なる任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $a \in A_\ell$ であり、よって $a \in T$ である。したがって $C \subset T$ である。

⊃) $a \in T$ とする。T の定義より、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $\ell \geq k$ ならば $a \in A_\ell$ である。したがって

$$a \in \bigcap_{\ell=k}^{\infty} A_\ell = C_k \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m = C$$

である。よって $C \supset T$ である。

以上より $C = T$ である。

(3) B, C は (1), (2) で定めたものとする。$B = C$ を示す。

⊂) $b \in B$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を取って固定する。B の定義により $b \in B_m = \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j$ である。よって、ある $k \geq m$ があって $b \in A_k$ となるが、仮定より $A_k \subset A_m$ なので $b \in A_m$ である。したがって、任意の $m \in \mathbb{N}$ について $b \in A_m$ となる。よって $b \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = C_1 \subset C$ である。したがって $B \subset C$ である。

⊃) $c \in C$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を任意に取り固定する。C の定義により、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $c \in C_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ である。よって $\ell \geq k$ なる任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $c \in A_\ell$ である。$n = \max\{m, k\}$ とおく。$n \geq k$ より $c \in A_n$ である。また $n \geq m$ と仮定により $A_n \subset A_m$ である。更に $A_m \subset B_m$ である。よって $c \in B_m$ となる。$m \in \mathbb{N}$ は任意に取って固定したものだったから $c \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = B$ である。$B \supset C$ が成り立つ。

以上より $B = C$ である。