代数入門問題集 [20070702]

1 二項演算、半群、モノイド

1. 集合 A の二項演算の定義を答えよ。
2. 集合 A がちょうど二つの要素をもつとする。A の二項演算はいくつあるか。
3. $A = \{a, b\}$ を $a \neq b$ なる集合とする。A の二項演算で、結合法則をみたすものを具体的に一つ構成せよ。
4. 以下のものは、半群、モノイド、群、そのいずれでもないか、最も適当なものをそれぞれ答えよ。
   (1) 集合 $\{0, 1\}$ で通常の加法を演算とするもの。
   (2) 集合 $\{0, 1\}$ で通常の乗法を演算とするもの。
   (3) 集合 $\{-1, 1\}$ で通常の乗法を演算とするもの。
   (4) 集合 $\{-1, 0, 1\}$ で通常の乗法を演算とするもの。
   (5) 実数を成分とする n 次正方行列の全体で通常の加法を演算とするもの。
   (6) 実数を成分とする n 次正方行列の全体で通常の乗法を演算とするもの。
   (7) 実数を成分とする n 次正則行列の全体で通常の乗法を演算とするもの。
5. 実数を成分とする n 次正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ について $(AB)C = A(BC)$ が成り立つことを示せ。
6. 複素数 $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$, $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$, $\alpha_3 = a_3 + b_3 i$ について $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$ が成り立つことを示せ。ただし $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ で i は虚数単位とする。
7. 直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に
$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$$
   で二項演算を定める。
   (1) これが結合法則を満たすことを示せ。(よってこれは半群である。)
   (2) 単位元を求めよ。(よってこれはモノイドである。)
   (3) 正則元を決定し、その逆元も求めよ。
8. 直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
   で二項演算を定める。
   (1) これが結合法則を満たすことを示せ。
   (2) 単位元を求めよ。
   (3) 正則元を決定し、その逆元も求めよ。
9. 直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に
$$\begin{aligned}(a, b, c) + (d, e, f) &= (a + d,\ b + e,\ c + f)\\ (a, b, c)(d, e, f) &= (ad,\ ae + bf,\ cf)\end{aligned}$$
   で和と積を定める。
   (1) 積が結合法則を満たすことを示せ。
   (2) 積に関する単位元を求めよ。
   (3) 積に関する正則元を決定し、その逆元も求めよ。
   (4) 和と積が分配法則 $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,\ \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ を満たすことを示せ。
10. $M_2(\mathbb{R})$ を実数を成分とする 2 次正方行列全体の集合とする。$P, Q \in M_2(\mathbb{R})$ に対して $[P, Q] = PQ - QP$ によって二項演算を定める。これが結合法則を満たさないことを示せ。
11. $|A| = 2$ なる可換半群を一つ具体的に構成せよ。また $|A| = 2$ なる非可換な半群を一つ具体的に構成せよ。
12. 半群であるがモノイドではないものの例を一つ挙げよ。
13. モノイドであるが群ではないものの例を一つ挙げよ。

14. モノイドの単位元はただ一つ存在することを示せ。

15. モノイドの正則元に対して、その逆元はただ一つ存在することを示せ。

16. M をモノイドとし、a を M の正則元とする。写像 $f : M \to M$ を $f(m) = am$ によって定めれば f は全単射であることを示せ。

17. $A = \{0, 1\}$ は通常の乗法によって半群になっている。このとき**演算表** (乗法表) を

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

のように書く。$A = \{0, 1, -1\}$ も通常の乗法によって半群になっている。この半群の乗法表を書け。

代数入門問題集・解答例と解説 [20070702]

1　二項演算、半群、モノイド

1. A の二項演算とは、写像 $A \times A \to A$ のことである。

2. 一般に、有限集合 X, Y について $|X| = m, |Y| = n$ とすると、X から Y への写像は n^m 個ある。$|A \times A| = 4$, $|A| = 2$ であるから、二項演算は $2^4 = 16$ 個ある。

3. 例えば以下のようなものがある。

   (1) 任意の $x, y \in A$ に対して $f(x, y) = a$ であるもの。

   (2) $f(a, a) = f(a, b) = a,\ f(b, a) = f(b, b) = b$ で定まるもの。

   (3) $f(a, a) = f(a, b) = f(b, a) = a,\ f(b, b) = b$ で定まるもの。

   (4) $f(a, a) = f(b, b) = a,\ f(a, b) = f(b, a) = b$ で定まるもの。

4. (1) いずれでもない (2) モノイド (3) 群 (4) モノイド (5) 群 (6) モノイド (7) 群

5. AB の (i, j)-成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ である。$(AB)C$, $A(BC)$ の (i, j)-成分はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} (a_{i\ell} b_{\ell k}) c_{kj} \\
(A(BC))_{ij} &= \sum_{p=1}^{n} a_{ip} (BC)_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{ip} (b_{pq} c_{qj})
\end{aligned}
$$

   であるから、これらは等しい。

   (二つの行列が等しいことの定義は、すべての対応する成分が等しいことである。)

6. 直接計算することによって

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3 &= ((a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i))(a_3 + b_3 i) = ((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i)(a_3 + b_3 i) \\
&= ((a_1 a_2 - b_1 b_2) a_3 - (a_1 b_2 + b_1 a_2) b_3) + ((a_1 a_2 - b_1 b_2) b_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) a_3) i \\
&= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3) + (a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3) i \\
\alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3) &= (a_1 + b_1 i)((a_2 + b_2 i)(a_3 + b_3 i)) = (a_1 + b_1 i)((a_2 a_3 - b_2 b_3) + (a_2 b_3 + b_2 a_3) i) \\
&= (a_1 (a_2 a_3 - b_2 b_3) - b_1 (a_2 b_3 + b_2 a_3)) + (a_1 (a_2 b_3 + b_2 a_3) + b_1 (a_2 a_3 - b_2 b_3)) i \\
&= (a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 a_3) + (a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3) i
\end{aligned}
$$

   となるから、この二つの値は等しい。

7. (1) $((a, b)(c, d))(e, f) = (ac, ad + bc)(e, f) = (ace, acf + (ad + bc)e) = (ace, acf + ade + bce)$ である。また $(a, b)((c, d)(e, f)) = (a, b)(ce, cf + de) = (ace, a(cf + de) + bce) = (ace, acf + ade + bce)$ である。よって $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$ であり、結合法則が成り立つ。

   (2) $(1, 0)(a, b) = (a, b)(1, 0) = (a, b)$ となるので $(1, 0)$ が単位元である。

   (3) (a, b) について、$a = 0$ ならば $(0, b)(c, d) = (0, bc) \neq (1, 0)$ であるから (a, b) は正則元ではない。$a \neq 0$ とする。このとき $(a, b)(a^{-1}, -b/a^2) = (a^{-1}, -b/a^2)(a, b) = (1, 0)$ が成り立つ。よって (a, b) が正則元となるための必要十分条件は $a \neq 0$ で、そのときの逆元は $(a^{-1}, -b/a^2)$ である。

8. (1) 省略。

   $(((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$ を計算によって確かめればよい。実は問 6 と本質的に同じである。)

   (2) $(1, 0)(a, b) = (a, b)(1, 0) = (a, b)$ となるので $(1, 0)$ が単位元である。

   (3) $(a, b) = (0, 0)$ は零元なので正則元ではない。$(a, b) \neq (0, 0)$ と仮定する。$(a, b)(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2)) = (a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))(a, b) = (1, 0)$ が成り立つ。よって (a, b) が正則元となるための必要十分条件は $(a, b) \neq (0, 0)$ で、そのときの逆元は $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ である。

9. (1) 省略。

   (2) $(1, 0, 1)$ が単位元である。

(3) (a,b,c) が正則元になるための必要条件として $a \neq 0$, $c \neq 0$ がすぐに分かる。$a \neq 0$, $c \neq 0$ と仮定する。このとき $(a,b,c)(1/a,\ -b/ac,\ 1/c) = (1/a,\ -b/ac,\ 1/c)(a,b,c) = (1,0,1)$ が確認できる。よって (a,b,c) が正則となるための必要十分条件は $a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ であることで、このとき逆元は $(1/a,\ -b/ac,\ 1/c)$ である。

(4) 計算によって確かめるだけなので省略する。

10. E_{ij} で (i,j)-成分が 1 で、他の成分がすべて 0 である 2 次正方行列を表すことにする。このとき

$$[[E_{11}, E_{11}], E_{12}] = 0, \quad [E_{11}, [E_{11}, E_{12}]] = E_{12}$$

となり、結合法則は成り立たない。

(結合法則が成り立たないことを示すには、成り立たないような例を一つ挙げればよい。)

11. $A = \{a, b\}$ とする。任意の $x, y \in A$ に対して $xy = a$ で定まるものは可換半群である。$aa = ab = a$, $ba = bb = b$ で定まるものは非可換半群である。

12. 例えば、$2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ で演算として乗法を考えたもの。

13. 例えば、$\mathbb{Z}$ で演算として乗法を考えたもの。

14. e, e' を共に単位元とする。このとき $e = ee' = e'$ であるから $e = e'$ である。よって単位元はただ一つである。

15. e を単位元とする。a をモノイドの正則元とし b, b' を共に a の逆元とする。このとき $b = b1 = b(ab') = (ba)b' = 1b' = b'$ であるから $b = b'$ である。よって a の逆元はただ一つである。

16. (単射であること) $f(m) = f(m')$ とする。$am = am'$ である。a は正則元なので、逆元 a^{-1} が存在する。a^{-1} を $am = am'$ に左からかければ $m = m'$ となる。よって f は単射である。

(全射であること) $m \in M$ とする。このとき $f(a^{-1}m) = a(a^{-1}m) = m$ となるので f は全射である。

[**別解**] $g : M \to M$ を $g(m) = a^{-1}m$ で定める。このとき $fg = gf = \mathrm{id}_M$ となるので f は全単射である。

17.

	0	1	−1
0	0	0	0
1	0	1	−1
−1	0	−1	1